

সসীম ধারা (Finite Series)

প্রাত্যহিক জীবনে 'ক্রম' বহুল প্রচলিত একটি শব্দ। যেমন - দোকানের তাকে ভোগ্যপণ্য সাজাতে, নাটক ও অনুষ্ঠানের ঘটনাবলী সাজাতে, গুদামঘরে সুন্দরভাবে দ্রব্যাদি রাখতে ক্রমের ধারণা ব্যবহৃত হয়। আবার অনেক কাজ সহজে এবং দৃষ্টিনন্দনভাবে সম্পাদন করতে আমরা বড় হতে ছোট, শিশু হতে বৃদ্ধ, হালকা হতে ভারী ইত্যাদি বিভিন্ন ধরনের ক্রম ব্যবহার করি। এই ক্রমের ধারণা হতেই বিভিন্ন প্রকার গাণিতিক ধারার উদ্ভব হয়েছে। এই অধ্যায়ে অনুক্রম ও ধারার মধ্যে সম্পর্ক ও এতদ সংক্রান্ত বিষয়বস্তু উপস্থাপন করা হয়েছে।

অনুক্রম (Sequence)

নিচের সম্পর্কটি লক্ষ করি:

1	2	3	4	...	n	...
↓	↓	↓	↓		↓	
2	4	6	8	...	$2n$	...

এখানে প্রত্যেক স্বাভাবিক সংখ্যা n তার দ্বিগুণ সংখ্যা $2n$ এর সাথে সম্পর্কিত। অর্থাৎ স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $\{1, 2, 3, \dots\}$ থেকে একটি নিয়মের মাধ্যমে যোগবোধক জোড় সংখ্যার সেট $\{2, 4, 6, \dots\}$ পাওয়া যায়। এই সাজানো জোড়সংখ্যার সেটটি একটি অনুক্রম। সুতরাং, কতকগুলো রাশি একটা বিশেষ নিয়মে ক্রমান্বয়ে এমনভাবে সাজানো হয় যে প্রত্যেক রাশি তার পূর্বের পদ ও পরের পদের সাথে কীভাবে সম্পর্কিত তা জানা যায়। এভাবে সাজানো রাশিগুলোর সেটকে অনুক্রম (Sequence) বলা হয়।

উপরের সম্পর্কটিকে ফাংশন বলে এবং $f(n) = 2n$ লিখা হয়। এই অনুক্রমের সাধারণ পদ $2n$ । যেকোনো অনুক্রমের পদসংখ্যা অসীম। অনুক্রমটি সাধারণ পদের সাহায্যে লিখার পদ্ধতি হলো $\{2n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ বা, $\{2n\}_{n=1}^{+\infty}$ বা, $\{2n\}$ ।

অনুক্রমের প্রথম রাশিকে প্রথম পদ, দ্বিতীয় রাশিকে দ্বিতীয় পদ, তৃতীয় রাশিকে তৃতীয় পদ ইত্যাদি বলা হয়। $1, 3, 5, 7, \dots$ অনুক্রমের প্রথম পদ = 1, দ্বিতীয় পদ = 3, ইত্যাদি। নিচে অনুক্রমের চারটি উদাহরণ দেওয়া হলো:

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

$$1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots$$

$$1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

কাজ:

ক) নিচে ছয়টি অনুক্রমের সাধারণ পদ দেওয়া আছে। অনুক্রমগুলো লিখ:

(১) $\frac{1}{n}$

(২) $\frac{n-1}{n+1}$

(৩) $\frac{1}{2^n}$

(৪) $\frac{1}{2^{n-1}}$

(৫) $(-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$

(৬) $(-1)^{n-1} \frac{n}{2n+1}$

খ) তোমরা প্রত্যেকে একটি করে অনুক্রমের সাধারণ পদ লিখে অনুক্রমটি লিখ।

ধারা (Series)

কোনো অনুক্রমের পদগুলো পরপর + চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করলে একটি ধারা (Series) পাওয়া যায়। যেমন, $1 + 3 + 5 + 7 + \dots$ একটি ধারা। ধারাটির পরপর দুইটি পদের পার্থক্য সমান। আবার $2 + 4 + 8 + 16 + \dots$ একটি ধারা। এর পরপর দুইটি পদের অনুপাত সমান। সুতরাং, যেকোনো ধারার পরপর দুইটি পদের মধ্যে সম্পর্কের উপর নির্ভর করে ধারাটির বৈশিষ্ট্য। ধারাগুলোর মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ দুইটি ধারা হলো সমান্তর ধারা ও গুণোত্তর ধারা।

সমান্তর ধারা (Arithmetic Series)

কোনো ধারার যেকোনো পদ ও তার পূর্ববর্তী পদের পার্থক্য সব সময় সমান হলে, সেই ধারাটিকে সমান্তর ধারা বলে।

উদাহরণ ১. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$ একটি ধারা। এই ধারাটির প্রথম পদ 1, দ্বিতীয় পদ 3, তৃতীয় পদ 5 ইত্যাদি।

এখানে, দ্বিতীয় পদ - প্রথম পদ = $3 - 1 = 2$,

তৃতীয় পদ - দ্বিতীয় পদ = $5 - 3 = 2$, চতুর্থ পদ - তৃতীয় পদ = $7 - 5 = 2$,

পঞ্চম পদ - চতুর্থ পদ = $9 - 7 = 2$, ষষ্ঠ পদ - পঞ্চম পদ = $11 - 9 = 2$

সুতরাং, ধারাটি একটি সমান্তর ধারা।

এই ধারায় প্রাপ্ত দুইটি পদের বিয়োগফলকে সাধারণ অন্তর বলা হয়। উল্লেখিত ধারার সাধারণ অন্তর 2। ধারাটির পদ সংখ্যা নির্দিষ্ট। এ জন্য এটি একটি সসীম বা সান্ত ধারা (Finite Series)। উল্লেখ্য, সমান্তর ধারার পদসংখ্যা নির্দিষ্ট না হলে একে অসীম বা অনন্ত ধারা (Infinite Series) বলে। যেমন, $1 + 4 + 7 + 10 + \dots$ একটি অসীম ধারা। সমান্তর ধারায় সাধারণত প্রথম পদকে a দ্বারা এবং সাধারণ অন্তরকে d দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তাহলে সংজ্ঞানুসারে, প্রথম পদ a হলে, দ্বিতীয় পদ $a + d$, তৃতীয় পদ $a + 2d$ ইত্যাদি। সুতরাং, ধারাটি হবে, $a + (a + d) + (a + 2d) + \dots$ ।

সমান্তর ধারার সাধারণ পদ নির্ণয়

মনে করি, যেকোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a ও সাধারণ অন্তর d । তাহলে ধারাটির

$$\text{প্রথম পদ} = a = a + (1 - 1)d$$

$$\text{দ্বিতীয় পদ} = a + d = a + (2 - 1)d$$

$$\text{তৃতীয় পদ} = a + 2d = a + (3 - 1)d$$

$$\text{চতুর্থ পদ} = a + 3d = a + (4 - 1)d$$

...

...

$$\therefore n \text{ তম পদ} = a + (n - 1)d$$

এই n তম পদকেই সমান্তর ধারার সাধারণ পদ বলা হয়। কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a , সাধারণ অন্তর d জানা থাকলে n তম পদে $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ বসিয়ে পর্যায়ক্রমে ধারাটির প্রত্যেকটি পদ নির্ণয় করা যায়।

মনে করি, একটি সমান্তর ধারার প্রথম পদ 3 এবং সাধারণ অন্তর 2। অতএব, ধারাটির n তম পদ $= 3 + (n - 1) \times 2 = 2n + 1$ ।

কাজ: কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ 5 এবং সাধারণ অন্তর 7 হলে, ধারাটির প্রথম ছয়টি পদ, 22 তম পদ, r তম এবং $(2p + 1)$ তম পদ নির্ণয় কর।

উদাহরণ ২. $5 + 8 + 11 + 14 + \dots$ ধারাটির কোন পদ 383?

সমাধান: ধারাটির প্রথম পদ $a = 5$, সাধারণ অন্তর $d = 8 - 5 = 11 - 8 = 14 - 11 = 3$

∴ ইহা একটি সমান্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ = 383

আমরা জানি, n তম পদ = $a + (n - 1)d$

$$\therefore a + (n - 1)d = 383$$

$$\text{বা, } 5 + (n - 1)3 = 383$$

$$\text{বা, } 5 + 3n - 3 = 383$$

$$\text{বা, } 3n = 383 - 5 + 3$$

$$\text{বা, } 3n = 381$$

$$\text{বা, } n = \frac{381}{3}$$

$$\text{বা, } n = 127$$

∴ প্রদত্ত ধারার 127 তম পদ = 383।

সমান্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি

মনে করি, যেকোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a , শেষ পদ p , সাধারণ অন্তর d , পদ সংখ্যা n এবং ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n ।

ধারাটিকে প্রথম পদ হতে শেষ পদ এবং বিপরীতক্রমে শেষ পদ হতে প্রথম পদ লিখে পাওয়া যায়

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (p - 2d) + (p - d) + p \dots (1)$$

$$\text{এবং } S_n = p + (p - d) + (p - 2d) + \dots + (a + 2d) + (a + d) + a \dots (2)$$

$$\text{যোগ করে, } 2S_n = (a + p) + (a + p) + (a + p) + \dots + (a + p) + (a + p) + (a + p)$$

$$\text{বা, } 2S_n = n(a + p) \quad [\because \text{ধারাটির পদ সংখ্যা } n]$$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}(a + p) \dots (3)$$

আবার, n তম পদ = $p = a + (n - 1)d$ । p এর মান (3) এ বসিয়ে পাই,

$$S_n = \frac{n}{2}[a + \{a + (n - 1)d\}]$$

$$\text{অর্থাৎ, } S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\} \dots (4)$$

কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a , শেষ পদ p এবং পদ সংখ্যা n জানা থাকলে, (3) নং সূত্রের সাহায্যে ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় করা যায়। কিন্তু প্রথম পদ a , সাধারণ অন্তর d , পদ সংখ্যা n জানা থাকলে, (4) নং সূত্রের সাহায্যে ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় করা যায়।

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয়

মনে করি, n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি S_n

অর্থাৎ, $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$

ধারাটিকে প্রথম পদ হতে এবং বিপরীতক্রমে শেষ পদ হতে লিখে পাওয়া যায়

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n \dots (1)$$

$$\text{এবং } S_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1 \dots (2)$$

$$\text{যোগ করে, } 2S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) \quad [n \text{ সংখ্যক পদ}]$$

$$\text{বা, } 2S_n = n(n+1)$$

$$\therefore S_n = \frac{n(n+1)}{2} \dots (3)$$

উদাহরণ ৩. প্রথম 50 টি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা (3) নং সূত্র ব্যবহার করে পাই,

$$S_{50} = \frac{50(50+1)}{2} = 25 \times 51 = 1275$$

$\therefore$ প্রথম 50 টি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল 1275।

উদাহরণ 8. $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 =$ কত?

সমাধান: ধারাটির প্রথম পদ $a = 1$, সাধারণ অন্তর $d = 2 - 1 = 1$ এবং শেষ পদ $p = 99$ ।

$\therefore$ ইহা একটি সমান্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ = 99

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n তম পদ = $a + (n-1)d$

$$\therefore a + (n-1)d = 99$$

$$\text{বা, } 1 + (n-1)1 = 99$$

$$\text{বা, } 1 + n - 1 = 99$$

$$\therefore n = 99$$

(4) নং সূত্র হতে, সমান্তর ধারার প্রথম n -সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$$\text{সুতরাং, ধারাটির 99 টি পদের সমষ্টি } S_{99} = \frac{99}{2}\{2 \times 1 + (99-1) \times 1\} = \frac{99}{2}(2 + 98)$$

$$= \frac{99 \times 100}{2} = 99 \times 50 = 4950$$

বিকল্প পদ্ধতি: (3) নং সূত্র হতে, $S_n = \frac{n}{2}(a + p)$

$$\therefore S_{99} = \frac{99}{2}(1 + 99) = \frac{99 \times 100}{2} = 4950$$

উদাহরণ ৫. $7 + 12 + 17 + \dots$ ধারাটির 30 টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান: ধারাটির প্রথম পদ $a = 7$, সাধারণ অন্তর $d = 12 - 7 = 5$

$\therefore$ ইহা একটি সমান্তর ধারা। এখানে পদ সংখ্যা $n = 30$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$$

$$\text{তাহলে, 30 টি পদের সমষ্টি } S_{30} = \frac{30}{2}\{2 \cdot 7 + (30 - 1)5\} = 15(14 + 29 \times 5)$$

$$= 15(14 + 145) = 15 \times 159 = 2385$$

উদাহরণ ৬. রশিদ তার বেতন থেকে প্রথম মাসে 1200 টাকা সঞ্চয় করেন এবং পরবর্তী প্রতিমাসে এর পূর্ববর্তী মাসের তুলনায় 100 টাকা বেশি সঞ্চয় করেন।

ক) সমস্যাটিকে n সংখ্যক পদ পর্যন্ত ধারায় প্রকাশ কর।

খ) তিনি 18 তম মাসে কত টাকা এবং প্রথম 18 মাসে মোট কত টাকা সঞ্চয় করেন?

গ) তিনি কত বছরে মোট 106200 টাকা সঞ্চয় করেন?

সমাধান:

ক) প্রশ্নানুসারে, ধারাটির প্রথম পদ $a = 1200$, সাধারণ অন্তর $d = 100$

$$\therefore \text{দ্বিতীয় পদ} = 1200 + 100 = 1300$$

$$\text{তৃতীয় পদ} = 1300 + 100 = 1400$$

$$\therefore \text{ধারাটি } 1200 + 1300 + 1400 + \dots + n \text{ পর্যন্ত}$$

খ) আমরা জানি, n তম পদ $= a + (n - 1)d$

$$\therefore 18 \text{ তম মাসে সঞ্চয়} = a + (18 - 1)d = 1200 + 17 \times 100 = 2900 \text{ টাকা}$$

$$\text{আবার, প্রথম } n \text{ সংখ্যক পদের সমষ্টি} = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$$

$$\therefore \text{প্রথম 18 মাসের সঞ্চয়} = \frac{18}{2}\{2 \times 1200 + (18 - 1) \times 100\} \text{ টাকা}$$

$$= 9(2400 + 1700) = 36900 \text{ টাকা}$$

গ) মনে করি, তিনি n মাসে 106200 টাকা সঞ্চয় করেন।

প্রশ্নানুসারে, $\frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} = 106200$

বা, $\frac{n}{2}\{2 \times 1200 + (n-1) \times 100\} = 106200$

বা, $n(2400 + 100n - 100) = 212400$

বা, $100n^2 + 2300n - 212400 = 0$

বা, $n^2 + 23n - 2124 = 0$

বা, $n^2 + 59n - 36n - 2124 = 0$

বা, $(n + 59)(n - 36) = 0$

অর্থাৎ, $n = -59$ অথবা $n = 36$

মাস কখনো ঋণাত্মক হতে পারেনা।

$\therefore$ নির্ণেয় সময়: 36 মাস বা 3 বছর।