

অধ্যায় ৫

এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ (Equations in One Variable)

আমরা পূর্বের শ্রেণিতে চলক ও সমীকরণ কী তা জেনেছি এবং এদের ব্যবহার শিখেছি। এক চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণের সমাধান করতে শিখেছি এবং বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সরল সমীকরণ গঠন করে তা সমাধান করা সম্পর্কে সম্যক জ্ঞান লাভ করেছি। এ অধ্যায়ে এক চলকবিশিষ্ট একঘাত ও দ্বিঘাত সমীকরণ এবং অভেদ সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে এবং বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সমাধানে এদের ব্যবহার দেখানো হয়েছে।

চলক (Variable)

আমরা জানি, $x + 3 = 5$ একটি সমীকরণ। এটি সমাধান করতে হলে আমরা অজ্ঞাত রাশি x এর মান বের করি। এখানে অজ্ঞাত রাশি x একটি চলক। আবার, $x + a = 5$ সমীকরণটি সমাধান করতে হলে, আমরা x এর মান নির্ণয় করি, a এর মান নয়। এখানে x কে চলক ও a কে ধ্রুবক হিসাবে ধরা হয়। এক্ষেত্রে x এর মান a এর মাধ্যমে পাওয়া যাবে। তবে a এর মান নির্ণয় করতে হলে, আমরা লিখবো $a = 5 - x$; অর্থাৎ a এর মান x এর মাধ্যমে পাওয়া যাবে। এখানে a চলক ও x ধ্রুবক হিসাবে বিবেচিত। তবে বিশেষ কোনো নির্দেশনা না থাকলে প্রচলিত রীতি অনুযায়ী x কে চলক হিসাবে ধরা হয়। সাধারণত ইংরেজি বর্ণমালার ছোট হাতের শেষের দিকের অক্ষর x, y, z কে চলক হিসাবে এবং প্রথম দিকের অক্ষর a, b, c কে ধ্রুবক হিসেবে ব্যবহার করা হয়।

যে সমীকরণে একটি মাত্র অজ্ঞাত রাশি থাকে, তাকে এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ বা সরল সমীকরণ বলা হয়। যেমন, $x + 3 = 5$, $x^2 - 5x + b = 0$, $2y^2 + 5y - 3 = 0$ ইত্যাদি।

আমরা সেট সম্পর্কে জানি। যদি একটি সেট $S = \{x : x \in R, 1 \leq x \leq 10\}$ হয়, তবে x -এর মান 1 থেকে 10 পর্যন্ত যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে। এখানে x একটি চলক। কাজেই আমরা বলতে পারি যে, যখন কোনো অক্ষর প্রতীক কোনো সেটের উপাদান বোঝায় তখন একে চলক বলে।

সমীকরণের ঘাত: কোনো সমীকরণের চলকের সর্বোচ্চ ঘাতকে সমীকরণটির ঘাত বলে। $x + 1 = 5$, $2x - 1 = x + 5$, $y + 7 = 2y - 3$ সমীকরণগুলোর প্রত্যেকটির ঘাত 1; এগুলো এক চলকবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ।

আবার, $x^2 + 5x + 6 = 0$, $y^2 - y = 12$, $4x^2 - 2x = 3 - 6x$ সমীকরণগুলোর প্রত্যেকটির ঘাত 2; এগুলো এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ। $2x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ সমীকরণটি এক চলকবিশিষ্ট ত্রিঘাত সমীকরণ।

সমীকরণ ও অভেদ (Equation and Identity)

সমীকরণ: সমীকরণে সমান চিহ্নের দুইপক্ষে দুইটি বহুপদী থাকে, অথবা একপক্ষে (প্রধানত ডানপক্ষে) শূন্য থাকতে পারে। দুই পক্ষের বহুপদীর চলকের সর্বোচ্চ ঘাত সমান নাও হতে পারে। সমীকরণ সমাধান করে চলকের সর্বোচ্চ ঘাতের সমান সংখ্যক মান পাওয়া যাবে। এই মান বা মানগুলোকে বলা হয় সমীকরণটির মূল। এই মূল বা মূলগুলো দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হবে। একাধিক মূলের ক্ষেত্রে এগুলো সমান বা অসমান হতে পারে। যেমন, $x^2 - 5x + 6 = 0$ সমীকরণটির মূল 2, 3। আবার, $(x - 3)^2 = 0$ সমীকরণে x এর মান 3 হলেও এর মূল 3, 3।

অভেদ: সমান চিহ্নের দুইপক্ষে সমান ঘাতবিশিষ্ট দুইটি বহুপদী থাকে। চলকের সর্বোচ্চ ঘাতের সংখ্যার চেয়েও অধিক সংখ্যক মানের জন্য অভেদটি সিদ্ধ হবে। সমান চিহ্নের উভয় পক্ষের মধ্যে কোনো ভেদ নেই বলেই অভেদ। যেমন, $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 4x$ একটি অভেদ, এটি x এর সকল মানের জন্য সিদ্ধ হবে। তাই এই সমীকরণটি একটি অভেদ। প্রত্যেক কীজগণিতীয় সূত্র একটি অভেদ। যেমন $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ইত্যাদি অভেদ।

সকল সমীকরণ অভেদ নয়। অভেদে সমান ($=$) চিহ্নের পরিবর্তে $\equiv$ চিহ্ন ব্যবহৃত হয়। তবে সকল অভেদই সমীকরণ বলে অভেদের ক্ষেত্রেও সাধারণত সমান চিহ্ন ব্যবহার করা হয়।

সমীকরণ ও অভেদের পার্থক্য নিচে দেওয়া হলো:

সমীকরণ

সমীকরণ	অভেদ
১। সমান চিহ্নের দুই পক্ষে দুইটি বহুপদী থাকতে পারে অথবা এক পক্ষে শূন্য থাকতে পারে।	১। দুই পক্ষে দুইটি বহুপদী থাকে।
২। উভয় পক্ষের বহুপদীর মাত্রা অসমান হতে পারে।	২। উভয় পক্ষে বহুপদীর মাত্রা সমান থাকে।
৩। চলকের এক বা একাধিক মানের জন্য সমতাটি সত্য হয়।	৩। চলকের মূল সেটের সকল মানের জন্য সাধারণত সমতাটি সত্য হয়।
৪। চলকের মানের সংখ্যা সর্বাধিক মাত্রার সমান হতে পারে।	৪। চলকের অসংখ্য মানের জন্য সমতাটি সত্য।
৫। সকল সমীকরণ অভেদ নয়।	৫। সকল বীজগণিতীয় অভেদই সমীকরণ।

কাজ:

ক) নিচের সমীকরণগুলোর কোনটির ঘাত কত ও মূল কয়টি?

$$(১) 3x + 1 = 5 \quad (২) \frac{2y}{5} - \frac{y-1}{3} = \frac{3y}{2}$$

খ) তিনটি অভেদ লেখ।

একঘাত সমীকরণের সমাধান (Solving Linear Equations)

সমীকরণ সমাধানের ক্ষেত্রে কয়েকটি নিয়ম প্রয়োগ করতে হয়। এই নিয়মগুলো জানা থাকলে সমীকরণের সমাধান নির্ণয় সহজতর হয়। নিয়মগুলো হলো:

১. সমীকরণের উভয়পক্ষে একই সংখ্যা বা রাশি যোগ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে।
২. সমীকরণের উভয়পক্ষ থেকে একই সংখ্যা বা রাশি বিয়োগ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে।
৩. সমীকরণের উভয়পক্ষকে একই সংখ্যা বা রাশি দ্বারা গুণ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে।
৪. সমীকরণের উভয়পক্ষকে অশূন্য একই সংখ্যা বা রাশি দ্বারা ভাগ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে।

উপরের ধর্মগুলোকে বীজগণিতীয় রাশির মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়:

যদি $x = a$ এবং $c \neq 0$ হয় তাহলে,

$$(i) x + c = a + c \quad (ii) x - c = a - c \quad (iii) xc = ac \quad (iv) \frac{x}{c} = \frac{a}{c}$$

এছাড়া যদি a, b ও c তিনটি রাশি হয় তবে, $a = b + c$ হলে, $a - b = c$ হবে এবং $a + c = b$ হলে, $a = b - c$ হবে।

এই নিয়মটি পক্ষান্তর বিধি হিসাবে পরিচিত এবং এই বিধি প্রয়োগ করে বিভিন্ন সমীকরণ সমাধান করা হয়।

কোনো সমীকরণের পদগুলো ভিন্নাংশ আকারে থাকলে, লবগুলোতে চলকের ঘাত 1 এবং হরগুলো ধুবক হলে, সেগুলো একঘাত সমীকরণ।

উদাহরণ ১. সমাধান কর: $\frac{5x}{7} - \frac{4}{5} = \frac{x}{5} - \frac{2}{7}$

সমাধান: $\frac{5x}{7} - \frac{4}{5} = \frac{x}{5} - \frac{2}{7}$ বা, $\frac{5x}{7} - \frac{x}{5} = \frac{4}{5} - \frac{2}{7}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{25x - 7x}{35} = \frac{28 - 10}{35}$ বা, $\frac{18x}{35} = \frac{18}{35}$

বা, $18x = 18$ বা, $x = 1$

∴ সমাধান $x = 1$

এখন, আমরা এমন সমীকরণের সমাধান করবো যা বিঘাত সমীকরণের আকারে থাকে। এ সকল সমীকরণ সরলীকরণের মাধ্যমে সমতুল সমীকরণে রূপান্তর করে $ax = b$ আকারের একঘাত সমীকরণে পরিণত করা হয়। আবার, হরে চলক থাকলেও সরলীকরণ করে একঘাত সমীকরণে রূপান্তর করা হয়।

উদাহরণ ২. সমাধান কর: $(y - 1)(y + 2) = (y + 4)(y - 2)$

সমাধান: $(y - 1)(y + 2) = (y + 4)(y - 2)$

বা, $y^2 - y + 2y - 2 = y^2 + 4y - 2y - 8$

বা, $y - 2 = 2y - 8$

বা, $y - 2y = -8 + 2$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $-y = -6$

বা, $y = 6$

∴ সমাধান $y = 6$

উদাহরণ ৩. সমাধান কর ও সমাধান সেট লেখ: $\frac{6x + 1}{15} - \frac{2x - 4}{7x - 1} = \frac{2x - 1}{5}$

সমাধান: $\frac{6x + 1}{15} - \frac{2x - 4}{7x - 1} = \frac{2x - 1}{5}$

বা, $\frac{6x + 1}{15} - \frac{2x - 1}{5} = \frac{2x - 4}{7x - 1}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{6x + 1 - 6x + 3}{15} = \frac{2x - 4}{7x - 1}$

বা, $\frac{4}{15} = \frac{2x - 4}{7x - 1}$

বা, $15(2x - 4) = 4(7x - 1)$ [আড়গুণন করে]

$$\text{বা, } 30x - 60 = 28x - 4$$

$$\text{বা, } 30x - 28x = 60 - 4 \quad [\text{পক্ষান্তর করে}]$$

$$\text{বা, } 2x = 56 \quad \text{বা, } x = 28$$

$\therefore$ সমাধান $x = 28$

এবং সমাধান সেট $S = \{28\}$

উদাহরণ 8. সমাধান কর: $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-5}$

সমাধান: $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-5}$

$$\text{বা, } \frac{x-4+x-3}{(x-3)(x-4)} = \frac{x-5+x-2}{(x-2)(x-5)}$$

$$\text{বা, } \frac{2x-7}{x^2-7x+12} = \frac{2x-7}{x^2-7x+10}$$

দুই পক্ষের ভগ্নাংশ দুইটির মান সমান। আবার, দুই পক্ষের লব সমান, কিন্তু হর অসমান। এক্ষেত্রে লবের মান একমাত্র শূন্য হলেই দুই পক্ষ সমান হবে।

$$\therefore 2x - 7 = 0 \quad \text{বা, } 2x = 7 \quad \text{বা, } x = \frac{7}{2}$$

$$\therefore \text{সমাধান } x = \frac{7}{2}$$

কাজ: $(\sqrt{5} + 1)x + 4 = 4\sqrt{5}$ হলে, দেখাও যে, $x = 6 - 2\sqrt{5}$

একঘাত সমীকরণের ব্যবহার

বাস্তব জীবনে বিভিন্ন ধরনের সমস্যার সমাধান করতে হয়। এই সমস্যা সমাধানের অধিকাংশ ক্ষেত্রেই গাণিতিক জ্ঞান, দক্ষতা ও যুক্তির প্রয়োজন হয়। বাস্তব ক্ষেত্রে গাণিতিক জ্ঞান ও দক্ষতার প্রয়োগে একদিকে যেমন সমস্যার সুষ্ঠু সমাধান হয়, অন্যদিকে তেমনি প্রাত্যহিক জীবনে গণিতের মাধ্যমে সমস্যার সমাধান পাওয়া যায় বিধায়, শিক্ষার্থীরা গণিতের প্রতি আকৃষ্ট হয়। এখানে প্রাত্যহিক জীবনের বিভিন্ন সমস্যাকে সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করে তার সমাধান করা হবে।

বাস্তবভিত্তিক সমস্যা সমাধানে অজ্ঞাত সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য এর পরিবর্তে চলক ধরে নিয়ে সমস্যায় প্রদত্ত শর্তানুসারে সমীকরণ গঠন করা হয়। তারপর সমীকরণটি সমাধান করলেই চলকটির মান, অর্থাৎ অজ্ঞাত সংখ্যাটি পাওয়া যায়।

উদাহরণ ৫. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্কটি দশক স্থানীয় অঙ্ক অপেক্ষা ২ বেশি। অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যাবে তা প্রদত্ত সংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা ৬ কম হবে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, দশক স্থানীয় অঙ্কটি x অতএব, একক স্থানীয় অঙ্কটি হবে $x + 2$

$\therefore$ সংখ্যাটি $10x + (x + 2)$ বা, $11x + 2$

অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে পরিবর্তিত সংখ্যাটি হবে $10(x + 2) + x$ বা, $11x + 20$

প্রশ্নমতে, $11x + 20 = 2(11x + 2) - 6$

বা, $11x + 20 = 22x + 4 - 6$

বা, $22x - 11x = 20 + 6 - 4$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $11x = 22$

বা, $x = 2$

$\therefore$ সংখ্যাটি $11x + 2 = 11 \times 2 + 2 = 24$

$\therefore$ প্রদত্ত সংখ্যাটি ২৪

উদাহরণ ৬. একটি শ্রেণির প্রতিবেশে ৪ জন করে ছাত্র বসালে ৩ টি বেঞ্চ খালি থাকে। আবার, প্রতিবেশে ৩ জন করে ছাত্র বসালে ৬ জন ছাত্রকে দাঁড়িয়ে থাকতে হয়। ঐ শ্রেণির ছাত্র সংখ্যা কত?

সমাধান: মনে করি, শ্রেণিটির ছাত্র সংখ্যা x

যেহেতু প্রতিবেশে ৪ জন করে বসালে ৩ টি বেঞ্চ খালি থাকে, সেহেতু ঐ শ্রেণির বেঞ্চের সংখ্যা $= \frac{x}{4} + 3$

আবার, যেহেতু প্রতিবেশে ৩ জন করে বসালে ৬ জনকে দাঁড়িয়ে থাকতে হয়, সেহেতু ঐ শ্রেণির বেঞ্চের সংখ্যা $= \frac{x - 6}{3}$

যেহেতু শ্রেণির বেঞ্চের সংখ্যা একই থাকবে,

সুতরাং $\frac{x}{4} + 3 = \frac{x - 6}{3}$ বা, $\frac{x + 12}{4} = \frac{x - 6}{3}$

বা, $4x - 24 = 3x + 36$ বা, $4x - 3x = 36 + 24$

বা, $x = 60$

$\therefore$ ঐ শ্রেণির ছাত্র সংখ্যা ৬০

উদাহরণ ৭. কবির সাহেব তাঁর ৫৬০০০ টাকার কিছু টাকা বার্ষিক ১২% মুনাফায় ও বাকি টাকা বার্ষিক ১০% মুনাফায় বিনিয়োগ করলেন। এক বছর পর তিনি মোট ৬৪০০ টাকা মুনাফা পেলেন। তিনি ১২% মুনাফায় কত টাকা বিনিয়োগ করেছেন?