WELCOME

তামান্না ইয়াসমিন

ইন্সট্রাক্টর(গণিত)

মোবাইল: 01515299772

ইমেইলmtyasmin193@gmail.com

শ্রেণি : দ্বাদশ

বিষয় : গণিত

অধ্যায়

বীজগণিত

1. বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা
2. জটিল সংখ্যা
3. বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ
4. দ্বিপদী বিস্তৃতি

অধ্যায়

ত্রিকোণমিতি

1. বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ

অধ্যায়

কণিক

- পরাবৃত্ত
- উপবৃত্ত
- অধিবৃত্ত

বিস্তার, পরিমাপ ও সম্ভাবনা

বাস্তব সংখ্যা ও অসমতার প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

1. $a \in R$ হলে

- $|a| \geq a$
- $|a|^2 = a^2$
- $\sqrt{(a^2)} = |a|$
- $|ab| = |a|\,|b|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
- $|-a| = |a|$
-

$\lvert -a \rvert$	$0, a = 0$
	-a, a<0
	a, a>0

- $|a+b| \leq |a| + |b|$,$a, b \in R$
- $|a-b| < |a| + |b|$
- $|a| > |b|$ হলে $a^2 > b^2$
- $|a-b| \geq ||a| - |b||$

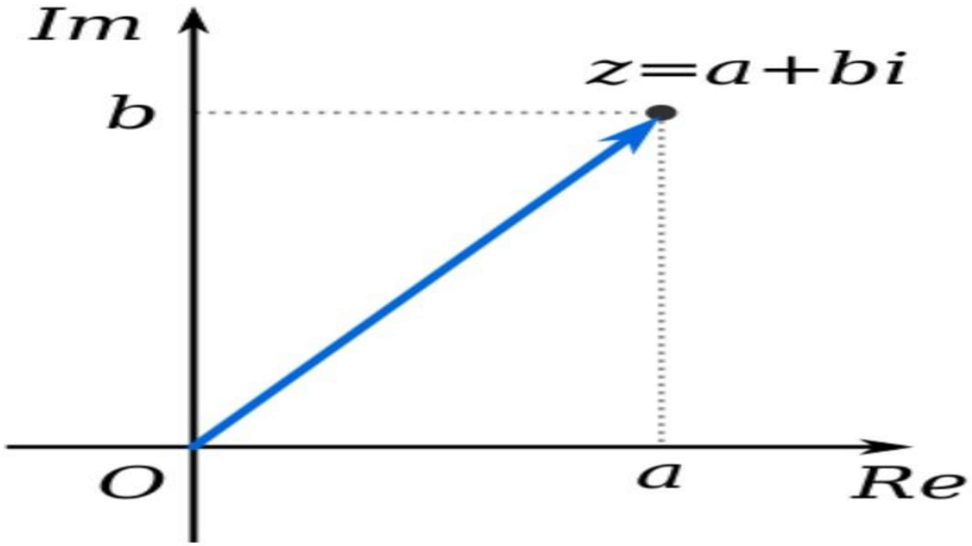
2. যদি a>0,b>0 এবং a>b হয় তবে

i. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
ii. $-a < -b$
iii. $-\frac{1}{a} > -\frac{1}{b}$

3. গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলী:
নিম্ন লিখিত প্রত্যেক প্রকারের সেটকে R এর ব্যবধি (interval) বলে এবং তা ব্যবধির প্রকাশের সংকেত পাশে দেওয়া হলো।

i. $\{x|a<x<b|\}=]a,b[$ বা, (a,b)
ii. $\{x|a\leq x\leq b|\}=[a,b]$
iii. $\{x|a<x\leq b|\}=]a,b]$ বা, $(a,b]$
iv. $\{x|a\leq x<b|\}=[a,b[$ বা, $[a,b)$

জটিল সংখ্যা



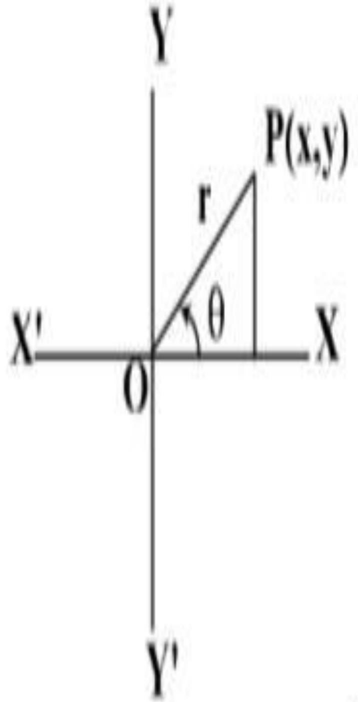
একটি জটিল সংখ্যাকে দুইটি বাস্তব সংখ্যার একটা ক্রমজোড় হিসেবে দেখা যেতে পারে যেটা আসলে আরগ্যান্ড সমতলে একটা ভেক্টর নির্দেশ করে। এখানে (a,b) ভেক্টরটি জটিল সংখ্যা a+ib কে নির্দেশ করছে

$$i^2 = -1$$

প্রতিটা জটিল সংখ্যাকেই *a+ib* আকারে লেখা যায়, যেখানে a এবং b বাস্তব সংখ্যা। a ও b-কে জটিল সংখ্যার বাস্তব অংশ এবং i-কে জটিল সংখ্যার কাল্পনিক অংশ বলা হয়।

জটিল সংখ্যার পরমমান (মডুলাস), নতি (আর্গুমেন্ট) ও পোলার আকার

ধরুন জটিল সমতলে অবস্থিত $P(x, y)$ একটি বিন্দু, যাকে $z = x + iy$ জটিল সংখ্যা দ্বারা সূচিত করা যায়। স্থানাঙ্ক জ্যামিতি অনুসারে Pএর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) হলে চিত্র অনুসারে, $OP = r$এবং$\angle XOP = \theta$



$\therefore x = r\cos\theta$এবং$y = r\sin\theta$

সুতরাং $r = \sqrt{x^2 + y^2}$এবং$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ কে বলা হয় z এর মডুলাস বা পরমমান এবং যাকে $|z|$ সূচিত করা হয় এবং θ কে বলা হয় বিস্তার (Amplitude)বা নতি বা আর্গুমেন্ট (Argument) যাকে amp zবা arg z দ্বারা সূচীত করা হয়।

$i^2 = -1, i^3 = i^2.i = -1.i = -i,$

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1, i^5 = i^4.i = 1.i = i$ ইত্যাদি

x ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে, $i^{4x} = (i^4)^x = 1^x = 1, i^{4x+1} = i^{4x}i = 1.\ i = i$

$i^{4x+2} = i^{4x}.i^2 = 1.(-1) = -1, i^{4x+3} = i^{4x}.i^3 = 1.i^2.i = (-1).i = -i$

সুতরাং x যথাক্রমে $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ আকারের সংখ্যা হলে i^x এর মান যথাক্রমে $1, i, -1, -i$ হবে।

আবার, $i.(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$ বিধায় $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i.i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i,$

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1, i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{i}{i^4} = \frac{i}{(i^2)^2} = \frac{i}{(-1)^2} = i$$

$$i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{(i^2)^2} = \frac{1}{(-1)^2} = \frac{1}{1} = 1$$

সুতরাং i এর ঘাত ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলেও তার মান ± 1 বা $\pm i$ হবে।

বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ

বহুপদী: বহুপদী বিশেষ ধরনের বীজগাণিতিক রাশি। বীজগাণিতিক রাশিতে এক বা একাধিক পদ থাকে এবং পদগুলো এক বা একাধিক চলকের শুধুমাত্র ধনাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক ঘাত ও ধ্রুবকের গুণফল হয়। যেমন, $x - 2$, $3x^2 - 4x + 5$, $x^2 - 3xy + 5y^2$, $x^3 - 2x^2y + 3xy^2 + 4y^3$ ইত্যাদি প্রত্যেকেই বহুপদী। এখানে x ও y হল চলক। বহুপদীতে চলক দ্বারা ভাগ করা যায় না। যেমন, $\sqrt{3x} - \frac{2}{x} + 3$, $\frac{x^2 - 5x + 2}{x + 2}$, $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$ ইত্যাদি বহুপদী নয়, কিন্তু বীজগাণিতিক রাশি।

মূলপাঠ

বহুপদী সমীকরণ: মনে করুন, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$ একটি এক চলকের বহুপদী, যেখানে $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ধ্রুবক এবং $a_0 \neq 0$। যদি $f(x) = 0$ সমীকরণের ঘাত $n \geq 1$ হয় তবে ঐ সমীকরণকে বহুপদী সমীকরণ বলা

হয়। এখানে, $f(x)=0$ সমীকরণে x এর সর্বোচ্চ ঘাত n, সুতরাং বহুপদী সমীকরণটির ঘাত n। এখানে a_0 কে মুখ্য সহগ বলা হয়।

উদাহরণ:$x^2-5x+6=0$ একটি বহুপদী সমীকরণ।

এখানে, x এর সর্বোচ্চ ঘাত 2। সুতরাং বহুপদী সমীকরণের ঘাত 2 এবং মুখ্য সহগ হল 1।

মনে করুন, $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় αএবং β।

এখন, $ax^2+bx+c=0, (a\neq 0)$

বা, $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ (a দ্বারা ভাগ করে)

যেহেতু α ও β সমীকরণের মূল, সুতরাং

$(x-\alpha)$ এবং $(x-\beta)$ হলো $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ এর উৎপাদক

অতএব, $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-\alpha)(x-\beta)$

বা, $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ ------------------ (1)

উভয় পক্ষ থেকে সহগ সমীকৃত করে পাই,

$\frac{b}{a} = -(\alpha+\beta)$ এবং $\frac{c}{a} = \alpha\beta$

অর্থাৎ $\alpha+\beta = \frac{-b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি $= \alpha+\beta = \frac{-b}{a} = -\frac{x \text{এর সহগ}}{x^2 \text{এর সহগ}} = \sum\alpha$,

মূলদ্বয়ের গুণফল $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{ধ্রুবক পদ}}{x^2 \text{এর সহগ}}$

অনুরূপভাবে, আমরা ত্রিঘাতিক, চতুর্থ ঘাতিক থেকে n ঘাতিক সমীকরণের মূল ও সহগের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারি।

মনে করুন, $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$বহুপদী সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ।

$\therefore ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$বা, $x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$

α, β, γ সমীকরণের মূল হওয়ায়,$(x-\alpha)$, $(x-\beta)$ এবং $(x-\gamma)$ বহুপদী $x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}$ এর তিনটি উৎপাদক।

সুতরাং $x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a} = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

বা, $x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a} = x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$ ---------------- (2)

উভয় পক্ষ থেকে সহগ সমীকৃত করে পাই,

$\frac{b}{a} = -(\alpha+\beta+\gamma)$,

বা, $\alpha+\beta+\gamma = \frac{-b}{a}$

বা, মূলগুলোর যোগফল

$= \alpha+\beta+\gamma = \sum\alpha = \frac{-b}{a}$

$= (-1)^1\frac{x^2 \text{এর সহগ}}{x^3 \text{এর সহগ}}$

$\frac{c}{a} = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

বা, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{c}{a}$

বা, প্রতিবার দুইটি মূল নিয়েযোগফল

$= \sum\alpha\beta = (-1)^2\frac{c}{a}$

$= (-1)^2\frac{x \text{এর সহগ}}{x^3 \text{এর সহগ}}$

$\frac{d}{a} = -\alpha\beta\gamma$

বা, $\alpha\beta\gamma = (-1)^3\frac{d}{a}$

বা,মূলগুলোর গুণফল

$= (-1)^3\frac{\text{ধ্রুবক পদ}}{x^3 \text{এর সহগ}}$

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে,

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots\dots\dots+a_n=0$ $(a_0\neq 0)$ বহুপদী সমীকরণের মূলগুলো $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$হলে

মূলগুলোর যোগফল $= \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n = \sum\alpha_1 = (-1)^1\frac{a_1}{a_0} = -\frac{a_1}{a_0}$

প্রতিবার দুটি করে মূল নিয়ে মূলগুলোর সমষ্টি$= \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_4+\dots\dots+\alpha_n\alpha_1 = \sum\alpha_1\alpha_2 = (-1)^2\frac{a_2}{a_0} = \frac{a_2}{a_0}$

প্রতিবার তিনটি করে মূল নিয়ে মূলগুলোর সমষ্টি$= \alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\dots\dots+\alpha_n\alpha_1\alpha_2 = \sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = (-1)^3\frac{a_3}{a_0} = -\frac{a_3}{a_0}$

সবগুলো মূলের গুণফল $= \alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}$

দ্বিঘাত সমীকরণ গঠনের সূত্র

মনেকরুন কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় α, β;সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী $x-\alpha$এবং $x-\beta$ উভয়ই নির্ণেয় সমীকরণের বামপক্ষের উৎপাদক। যেহেতু বামপক্ষ দ্বিঘাত বহুপদী সুতরাং বামপক্ষ $= (x-\alpha)(x-\beta)$

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ বা, $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

অর্থাৎ,x^2 – (মূলদ্বয়ের সমষ্টি) x + মূলদ্বয়ের গুণফল =0

যেমন:3, 4 মূলবিশিষ্ট সমীকরণ :$x^2-(3+4)x+3.4=0$ বা,$x^2-7x+12=0$ ।আবারx^2-6x+9 একটি পূর্ণবর্গ রাশি যা $(x-3)^2$ এর সমতূল্য। সুতরাং রাশিটি দ্বারা গঠিত দ্বিঘাত সমীকরণ $x^2-6x+9=0$। যার পৃথায়ক $=(-6)^2-4.1.9=0$। সুতরাং বর্গ রাশিটি দ্বারা গঠিত সমীকরণের মূলদ্বয় সমান।

সমস্যা ও সমাধান: নিম্নলিখিত উদাহরণের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের সমস্যা ও সমাধান দেখানো হলো।

উদাহরণ1: যদি $x^2-px+9=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হয় তবে α^2 ওβ^2 মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি গঠন করুন।

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ $x^2-px+9=0$

সমীকরণটির মূলদ্বয় αও β;

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha+\beta=-\frac{-p}{1}=p$

মূলদ্বয়ের গুণফল $\alpha.\beta=\frac{9}{1}=9$

এখন আমাদের α^2 ও β^2 মূল বিশিষ্ট সমীকরণ গঠন করতে হবে।

α^2ও β^2 মূল বিশিষ্ট সমীকরণের আকার হবে

x^2 – (মূলদ্বয়ের যোগফল) x + মূলদ্বয়ের গুণফল $=0$

বা, $x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0$

বা, $x^2-[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]x+(\alpha\beta)^2=0$

বা, $x^2-(p^2-18)x+9^2=0$ (মান বসিয়ে)

ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদাহরণ 2:কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি 2 এবং তাদের তৃতীয় ঘাতের সমষ্টি 27 হলে সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন সমীকরণটির মূলদ্বয় α, β

দেওয়া আছে, $\alpha+\beta=2$ এবং $\alpha^3+\beta^3=27$

এখন $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$; সুতরাং $2^3=27+3.\alpha\beta.2$ বা, $\alpha\beta=-\frac{19}{6}$

সুতরাং α, βমূলবিশিষ্ট সমীকরণ $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

বা, $6x^2-12x-19=0$ ই নির্ণেয় সমীকরণ।

পৃথায়ক বা নিশ্চায়ক(Discriminant):

$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ আকারের দ্বিঘাত মূলদ্বয় α ও β হলে সমাধান সূত্র হতে জানি,

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ এবং } \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

এখানে লক্ষ্যনীয় যে, $b^2 - 4ac$ রাশিটি উভয় সমাধানের বর্গমূল চিহ্নের ভিতরে অবস্থিত। উপরোক্ত সমাধানে $b^2 - 4ac$ এর মান পর্যালোচনা করলে আমরা দ্বিঘাত সমীকরণটির মূলের প্রকৃতি জানতে পারি। এজন্য $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ কে দ্বিঘাত সমীকরণটির **পৃথায়ক বা নিশ্চায়ক বা নিরূপক** বলা হয়। একে D দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ পৃথায়ক $D = b^2 - 4ac$

দ্বিঘাত সমীকরণেরমূলের প্রকৃতি নির্ণয় (To determine the nature of the roots):

মূলের প্রকৃতি বলতে কোনো সমীকরণের মূলগুলো ধনাত্মক, ঋণাত্মক, মূলদ, অমূলদ, সমান, অসমান কিংবা জটিল সংখ্যা হবে কিনা তা নির্ধারণ করাকে বুঝায়। ধরুন, $ax^2 + bx + c = 0$; $(a \neq 0)$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যার সহগগুলো বাস্তব সংখ্যা ও মূলদ এবং এর মূলদ্বয় $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ এবং $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

এখন, যদি a, b, cএর মান বাস্তব ও মূলদ হয় তবে সমীকরণটির মূলের প্রকৃতি বর্গমূল (root) চিহ্নের মধ্যের রাশি $b^2 - 4ac$দ্বারা নির্ণীত হয়। $b^2 - 4ac$সমীকরণটির মূলের প্রকৃতি নিরূপণে সহায়তা করে। তাই একে পৃথায়ক (Discriminant) বা নিশ্চায়ক বলা হয় এবং সংক্ষেপে Dদ্বারা সূচিত করা হয়। **অর্থাৎ পৃথায়ক, $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$**

(i) যদি $b^2 - 4ac > 0$ অর্থাৎ ধনাত্মক হয় তবে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে।

(iiযদি$b^2 - 4ac > 0$ এবং পূর্ণবর্গ হয় তবে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও মূলদ হবে।

(iii) যদি $b^2 - 4ac = 0$ হয় তবে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, মূলদ ও সমান হবে।

(iv) যদি $b^2 - 4ac < 0$ অর্থাৎঋণাত্মক হয় তবে সমীকরণটির মূলদ্বয় পরস্পর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা হবে।

মন্তব্য: (i) a, b, cঅমূলদ হলে $D > 0$ এবং পূর্ণ বর্গ হলে ও মূলদ্বয় অমূলদ হয়।

(ii) সমীকরণটির যে কোনো সহগ জটিলরাশি হলে $D > 0$ হলেও মূলদ্বয় জটিল রাশি হয়।

(iii) যদি $D = 0$ হয় তবে মূলদ্বয় সমান হবে যার প্রত্যেকটি $\frac{-b}{2a}$ এর সমান হবে।

(iv) বাস্তব ও মূলদ সহগ বিশিষ্ট কোনো সমীকরণের জটিল সংখ্যা বিশিষ্ট মূলদ্বয় পরস্পর অনুবন্ধী আকারে থাকে।

(v) কোনো সমীকরণের একটি মূল অমূলদ হলে অপর একটি মূল যুগল (Conjugate) রূপে অমূলদ হয়।

(vi) কোনো সমীকরণের ধ্রুবক পদ বর্জিত হলে সমীকরণটির একটি মূল সর্বদায়ই শূন্য হয়।

দ্বিপদী বিস্তৃতি

দ্বিপদী উপপাদ্য

Mathematical Theorem

যে বীজগণিতীয় সূত্রের সাহায্যে একটি দ্বিপদী রাশির যে কোন শক্তি বা মূলকে একটি ধারায় প্রকাশ করা যায় তাকে দ্বিপদী উপপাদ্য বলা হয়।

$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1} x^1 + {}^nC_2 a^{n-2} x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^nC_r a^{n-r} x^r + \ldots\ldots + {}^nC_n x^n$, এই সূত্রটিকে দ্বিপদী উপপাদ্য বলা হয়।

দ্বিপদী উপপাদ্যের প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

দ্বিপদী ধারা-

1. $n \in N$ হলে,
   - $(a+x)^n = a^n +^n C_1 a^{n-1} x +^n C_2 a^{n-2} x^2 + \cdots \cdots \cdots$
   - $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ,
     $T_{r+1} = {}^nC_r\, a^{n-r}\, x^r$
   - $(a-x)^n = a^n - {}^nC_1 a^{n-1} x +^n C_2 a^{n-2} x^2 + \cdots \cdots \cdots + (-1)^r\, {}^nC_r\, a^{n-r}\, x^r + \cdots\cdots\cdots + (-1)^r\, x^r$
   - $(1+x)^n = a^n + {}^nC_1\, x +^n C_2\, x^2 + \cdots \cdots \cdots + {}^nC_r\, x^r + \cdots \cdots \cdots + x^r$
   - $(1-x)^n = 1 - {}^nC_1\, x +^n C_2\, x^2 + \cdots \cdots \cdots + (-1)^r\, {}^nC_r\, x^r + \cdots \cdots \cdots + (-1)^r\, x^r$

2. n ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা অথবা ভগ্নাংশ এবং $|x| < 1$ হলে,

- $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2}{3!}$
- $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ,

  $T_{(r+1)} = \frac{n(n-1)(n-2)..(n-r+1)}{r!}x^r$
- $(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2}{3!}$
- $(1-x)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ,

  $T_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)....(n-r+1)}{r!}(-1)^r x^r$

3. $|x| < 1$ হলে,

- $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^r + \cdots$
- $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^r x^r + \cdots$
- $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (r+1)x^r + \cdot\cdot$
- $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots + (-1)^r(r+1$
- $(1-x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots + \frac{1}{2}(r+1)(r$
- $(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + \cdots + (-1)^r\frac{1}{2}(r$

চ (ii): $\left(x^2 + \frac{3a}{x}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে x^{18} এর সহগ নির্ণয় ক

সমাধান: মনে করি,

$\left(x^2 + \frac{3a}{x}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদে x^{18} বিদ্যমান।

তাহলে, $(r+1)$ তম পদ $= {}^{15}C_r \left(x^2\right)^{15-r} \left(\frac{3a}{x}\right)^r$

$$= {}^{15}C_r \, x^{30-2r} \cdot (3a)^r \cdot x^{-r}$$

$$= {}^{15}C_r \, (3a)^r \cdot x^{30-3r}$$

যেহেতু পদটিতে x^{18} আছে,

সুতরাং $30 - 3r = 18$

বা, $3r = 12$

$\therefore r = 4$

$\therefore (4+1)$ তম পদ $= {}^{15}C_4 \, (3a)^4 \, x^{30-3\times4}$

$$= {}^{15}C_4 \, (3a)^4 \, x^{18}$$

$\therefore x^{18}$ এর সহগ $= {}^{15}C_4 \, (3a)^4$

$= 110565 a^4$ (Ans)

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

1. $sin^{-1}x + cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$
2. $tan^{-1}x + cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$
3. $sec^{-1}x + cosec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$
4. $tan^{-1}x + tan^{-1}y = tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$
5. $tan^{-1}x - tan^{-1}y = tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$
6. $tan^{-1}x + tan^{-1}y + tan^{-1}z = tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$
7. $sin^{-1}x + sin^{-1}y = sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$
8. $sin^{-1}x - sin^{-1}y = sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2})$
9. $cos^{-1}x + cos^{-1}y = cos^{-1}(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})$
10. $cos^{-1}x - cos^{-1}y = cos^{-1}(xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})$
11. $2sin^{-1}x = sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$
12. $2cos^{-1}x = cos^{-1}(2x^2 - 1)$

13. $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$

14. $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x-4x^3)$

15. $3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3-3x)$

16. $3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$

17. $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$

18. $\sin\sin^{-1}x = \sin^{-1}\sin x = x$

19. $\cos\cos^{-1}x = \cos^{-1}\cos x = x$

20. $\tan\tan^{-1}x = \tan^{-1}\tan x = x$

21. $\cot\cot^{-1}x = \cot^{-1}\cot x = x$

22. $\sec\sec^{-1}x = \sec^{-1}\sec x = x$

23. $\operatorname{cosec}\operatorname{cosec}^{-1}x = \operatorname{cosec}^{-1}\operatorname{cosec} x = x$

আদর্শ আকারের ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সাধারণ সমাধানঃ

1. $sin\theta = k = sin\alpha$ হলে, $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$
2. $cos\theta = k = cos\alpha$ হলে, $\theta = 2n\pi \pm \alpha$
3. $tan\theta = k = tan\alpha$ হলে, $\theta = n\pi + \alpha$
4. $sin\theta = 0$ অথবা, $tan\theta = 0$ হলে, $\theta = n\pi$
5. $sin\theta = 1$ হলে, $\theta = (4n + 1)\frac{\pi}{2}$
6. $sin\theta = -1$ হলে, $\theta = (4n - 1)\frac{\pi}{2}$
7. $cos\theta = 0$ হলে, $\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$
8. $cos\theta = 1$ হলে, $\theta = 2n\pi$
9. $cos\theta = -1$ হলে, $\theta = (2n + 1)\pi$

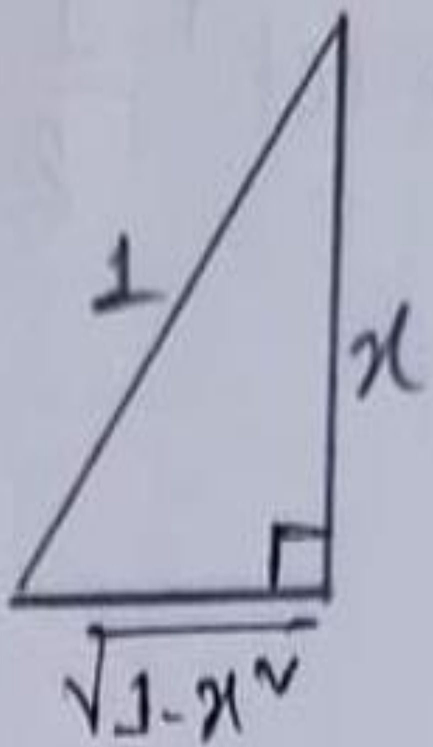
$\cos \tan^{-1} \cot \sin^{-1} x$

$= \cos \tan^{-1} \cot . \cot^{-1} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$= \cos \tan^{-1} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$= \cos \cos^{-1} x$

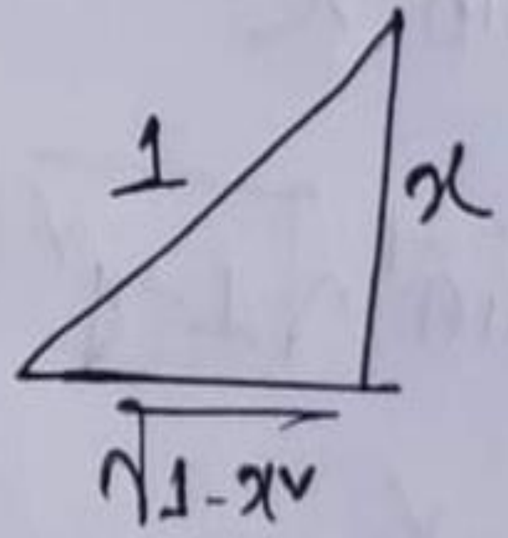
$= x$ (Ans.)



Trick: $\cot \cos^{-1} \sin \tan^{-1} x = x$

$\cot(\sin^{-1} x)$ এর মান কত?

$$\cot\left(\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$



$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$ (Ans)

$$4(\sin^2\theta + \cos\theta) = 5$$

$$\Rightarrow 4\sin^2\theta + 4\cos\theta = 5$$

$$\Rightarrow 4(1 - \cos^2\theta) + 4\cos\theta = 5$$

$$\Rightarrow 4 - 4\cos^2\theta + 4\cos\theta = 5$$

$$\Rightarrow 4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2\cos\theta - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos\theta - 1 = 0$$

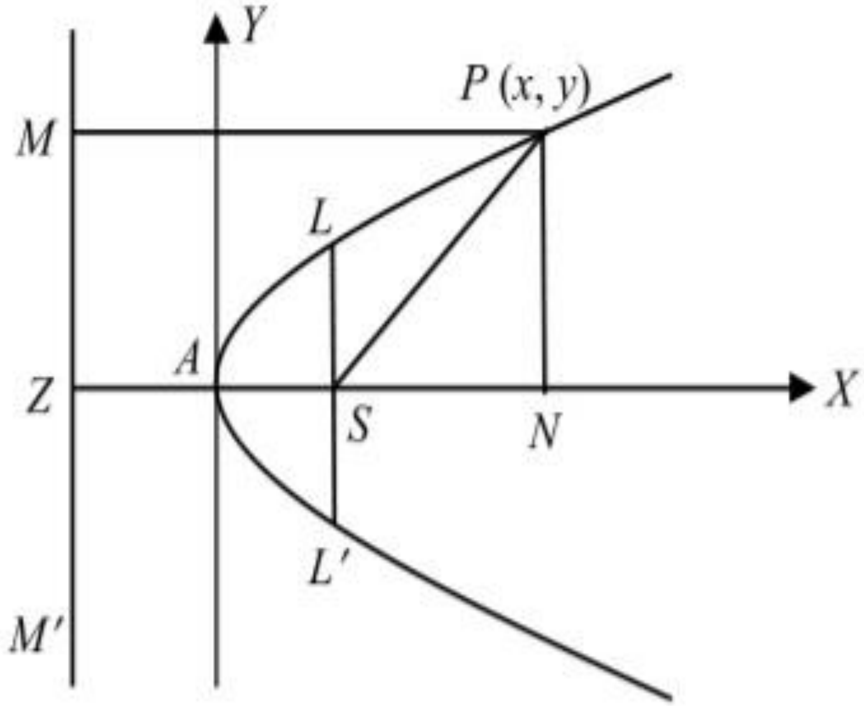
$$\Rightarrow \cos\theta = \quad = \cos$$

$\therefore \theta = 2n\pi \pm$ [$\cos\theta = \cos\alpha$ হলে $\theta = 2n\pi \pm \alpha$]

পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ(Standard Equation of Parabola)

মনে করুন,পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র ও নিয়ামকরেখা হলো যথাক্রমে S এবং MM' ।নিয়ামকরেখার উপর SZ লম্ব টানুনএবং SZ -এর মধ্যবিন্দু A নির্ণয় করুন। অতএব $SA = AZ$ । সংজ্ঞানুসারে, A পরাবৃত্তের উপর একটি বিন্দু যা শীর্ষবিন্দু এবং ASX পরাবৃত্তের অক্ষ। AX ও AY কে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ; A কে মূলবিন্দু এবং $AS = a = ZA$ ধরলে উপকেন্দ্র $S(a,0)$ পাওয়া যাবে।

মনে করুন, $P(x,y)$ পরাবৃত্তের উপর যেকোনো বিন্দু। S, P যোগ করুন। P হতেনিয়ামকরেখা ও AX এর উপর যথাক্রমে PM ও PN লম্ব আঁকুন। $AN = x$ এবং $PN = y$.



পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, আমরা পাই $SP = PM = ZN$

চিত্রানুযায়ী, $ZN = ZA + AN = a + x$

এখন, $SP^2 = SN^2 + PN^2 = (AN - AS)^2 + PN^2$

অর্থাৎ $(x-a)^2 = (x-a)^2 + y^2$

বা, $y^2 = (x+a)^2 - (x-a)^2$

$\therefore \; y^2 = 4ax$

এটিকে পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ বা আদর্শ সমীকরণ বলে।

প্রয়োজনীয় সূত্রসমূহ

পরাবৃত্তের সমীকরণ	$y^2 = 4ax (a > 0)$	$y^2 = -4ax (a > 0)$	$x^2 = 4ay (a > 0)$	$x^2 = -4ay (a > 0)$
(i)শীর্ষবিন্দর স্থানাঙ্ক	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
(ii)উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক	$(a,0)$	$(-a,0)$	$(0,a)$	$(0,-a)$
(iii)উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য	$4\|a\|$	$4\|a\|$	$4\|a\|$	$4\|a\|$
(iv)উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x = a$	$x = -a$	$y = a$	$y = -a$
(v)দিকাক্ষের সমীকরণ	$x = -a$	$x = a$	$y = -a$	$y = a$
vi) অক্ষরেখার সমীকরণ	$y = 0$	$y = 0$	$x = 0$	$x = 0$

উদাহরণ1: $y^2 = 5x$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

সমাধান: পরাবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 5x$ বা, $y^2 = 4.\frac{5}{4}x$

এখন, $y^2 = 4.\frac{5}{4}x$ সমীকরণটিকে $y^2 = 4ax$ -এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = \frac{5}{4}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4|a| = 4.\frac{5}{4} = 5$ এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, $(a,0) = \left(\frac{5}{4},0\right)$

উদাহরণ4: $y^2 = 8x - 8y$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, উপকেন্দ্র এবং অক্ষের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান:প্রদত্ত সমীকরণটিকেনিম্নরূপে লেখা যায়

$y^2 + 8y = 8x$ বা, $y^2 + 8y + 16 = 8x + 16$

বা, $(y+4)^2 = 8(x+2)$-------------(1)

এখন, $x+2=X$ এবং $y+4=Y$ লিখলে(1)সমীকরণটি দাঁড়ায় $Y^2 = 8X.$

$y^2 = 4ax$ এর সাথে $Y^2 = 8X$ -এর তুলনা করে পাই,

শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $X=0, Y=0$ বা, $x=-2, y=-4$ অর্থাৎ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-2, -4)$; উপকেন্দ্রিক লম্ব $= 8.$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, $X=2, Y=0$ বা, $x=0, y=-4$ অর্থাৎ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, -4)$

পরাবৃত্তের অক্ষ, $Y=0$ বা, $y+4=0$

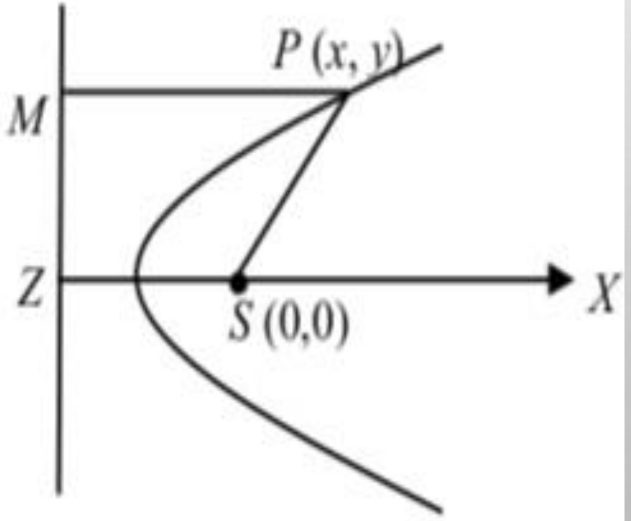
দিকাক্ষের সমীকরণ $X=-2$ বা, $x+2=-2$ বা, $x+4=0$

উদাহরণ6: পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রকে মূলবিন্দু এবং $x+2y-3=0$ রেখাকে দিকাক্ষ ধরে এর সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে উপকেন্দ্র $(0, 0)$, দিকাক্ষ MZ এবং পরাবৃত্তের উপর যেকোনো বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (x, y).

$$\therefore\ SP=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

$P(x,y)$ হতে দিকাক্ষ $x+2y-3=0$ রেখার লম্ব দূরত্ব , $PM=\left|\dfrac{x+2y-3}{\sqrt{1^2+2^2}}\right|=\left|\dfrac{x+2y-3}{\sqrt{5}}\right|$



সংজ্ঞানুসারে, $SP=PM$

বা, $SP^2=PM^2$

বা, $x^2+y^2=\left|\dfrac{x+2y-3}{\sqrt{5}}\right|^2$

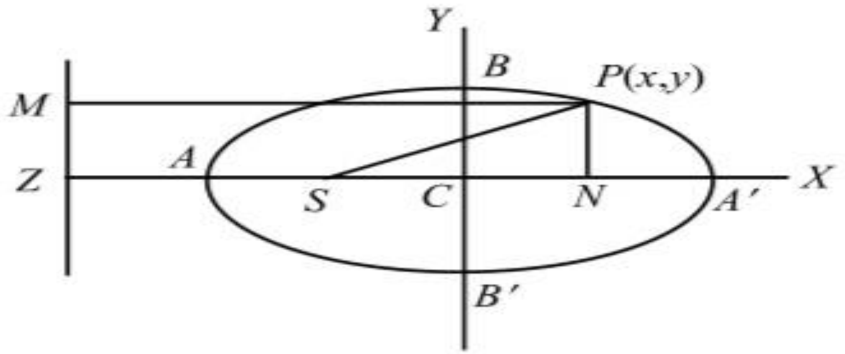
বা, $5(x^2+y^2)=x^2+4y^2+9+4xy-6x-12y$

বা, $4x^2-4xy+y^2+6x+12y-9=0$

বা, $(2x-y)^2+6x+12y-9=0$, এটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

উপবৃত্তের প্রমিত বা আদর্শ সমীকরণ(Standard Equation of Ellipse)

মনে করুন, S উপবৃত্তের উপকেন্দ্র, MZM' উপবৃত্তের নিয়ামকরেখা এবং eএর উৎকেন্দ্রিকতা, যেখানে $(0<e<1)$ । দিকাক্ষের উপর SZ লম্ব টানুন এবং ZS -কে বর্ধিত করুন। SZ -কে A ও A' বিন্দু দ্বারা e ঃ1 অনুপাতে যথাক্রমেঅন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করুন যেন $SA : AZ = SA' : A'Z = e$ হয়। C এর কেন্দ্র যা AA' এর মধ্যবিন্দু।



মনে করুন, $AA' = 2a; \therefore CA = CA' = a.$

এখন, $SA = e\cdot AZ$ বা, $a - CS = e(CZ - a)$-------(1)

এবং $SA' = e\cdot A'Z$ বা, $a + CS = e(CZ + a)$ -------- (2)

(1)ও (2)যোগ করে পাই, $2a = 2e\cdot CZ$ বা, $CZ = \frac{a}{e}$

(2) থেকে (1) বিয়োগ করে পাই, $2\cdot CS = 2e\cdot a$ বা, $CS = ae$

C -কে মূল বিন্দু, CX ও CY কে যথক্রমে x -অক্ষ ও y -অক্ষ ধরুন। $P(x, y)$ উপবৃত্তের উপর যেকোনো বিন্দু নিন। AA' এর উপর PN ওনিয়ামকরেখার উপর PM লম্ব আঁকুন।

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে, $SP = e\cdot PM = e\cdot NZ$

$\therefore\ SP^2 = e^2\cdot NZ^2$

বা, $SN^2 + PN^2 = e^2(CZ + CN)^2$

কিন্তু, $SN = CS + CN = ae + x,\ PN = y$

$\therefore\ (ae + x)^2 + y^2 = e^2\left(\frac{a}{e} + x\right)^2$

বা, $x^2(1-e^2) + y^2 = a^2(1-e^2)$

বা, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$ ------------- (3)

(3)-এ $x = 0$ ধরলে আমরা পাই, $y = \pm a\sqrt{1-e^2}$; দেখা যাচ্ছে যে, y -অক্ষ উপবৃত্তকে দুইটি বাস্তব বিন্দু (যেহেতু $e<1$) $B,\ B'$ -এ ছেদ করে। বিন্দু দুইটি C এর বিপরীত দিকে এমনভাবে অবস্থিত যে, $CB = CB' = a\sqrt{1-e^2}.$

মনে করুন, $CB = CB' = b.$ তাহলে $b^2 = a^2(1-e^2)$ -------------------- (4)

সুতরাং (3) সমীকরণটি দাঁড়ায় $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ যা উপবৃত্তের প্রমিত বা আদর্শ সমীকরণ।

উদাহরণ1: $3x^2+4y^2=12$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণটিকে $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ আকারে লেখা যায়। এখানে, $b^2=3$ এবং $a=2$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times3}{2}=3.$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্ত সম্পর্কে নিম্নলিখিত ফলগুলো স্মরণ রাখতে হবে,

উপবৃত্তের সমীকরণ	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$
(i) উপবৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক	$(0, 0)$	$(0, 0)$
(ii) বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য, ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য	$2a,\ 2b$	$2b,\ 2a$
(iii) উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক	$(ae, 0), (-ae, 0)$	$(0, be), (0, -be)$
(iv) বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ, ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ	$y=0, x=0$	$x=0, y=0$
(v) নিয়ামক রেখাদ্বয়ের সমীকরণ	$x=\frac{a}{e}, x=-\frac{a}{e}$	$y=\frac{b}{e}, y=-\frac{b}{e}$
(vi) উৎকেন্দ্রিকতা	$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$	$\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$
(vii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$
(viii) উপকেন্দ্রিক লম্বদ্বয়ের সমীকরণ	$x=\pm ae$	$y=\pm be$

উদাহরণ2: $16x^2+25y^2=400$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র,উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং লম্বের ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান:উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. অতএব, $a=5$ এবং $b=4$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{25-16}}{5}=\frac{3}{5}$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(ae,0)$ ও $(-ae,0)$; এখানে উপকেন্দ্র $\left(5\cdot\frac{3}{5},0\right)=(3,0)$ এবং $\left(-5\cdot\frac{3}{5},0\right)=(-3,0)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\cdot4^2}{5}=\frac{32}{5}$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $x=\pm ae$ অর্থাৎ, $x=\pm5\cdot\frac{3}{5}=\pm3$

দিকাক্ষের সমীকরণ $x=\pm\frac{a}{e}$ বা, $x=\pm\frac{5}{\frac{3}{5}}$ বা, $x=\pm\frac{25}{3}$

বিস্তার পরিমাপ

ভেদাঙ্ক (Variance):তথ্যবিন্দুগুলো হতে গাণিতিক গড়ের ব্যবধানগুলোর বর্গের গাণিতিক গড়কে ভেদাঙ্ক বলা হয়। একে σ^2 দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং ভেদাঙ্ক $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N}$, যেখানে $\bar{x} =$ গাণিতিক গড়, $N =$ তথ্যবিন্দুর সংখ্যা।

পরিমিত ব্যবধান (Standard Deviation):ভেদাঙ্কের ধনাত্মক বর্গমূলকে পরিমিত ব্যবধান বলে; একে σ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।সুতরাং পরিমিত ব্যবধান $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N}}$

উদাহরণ 1: নিচের গণসংখ্যা নিবেশনের ভেদাঙ্ক ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন:

শ্রেণি	7–12	12–17	17–22	22–27	27–32	32–37	37–42	42–47	47–52	52–57
গণসংখ্যা	3	6	11	15	19	14	12	9	5	2

সমাধান: প্রদত্ত শ্রেণি ও গণসংখ্যা ছক ব্যবহার করে নিচের ছকটি তৈরি করা হলো–

শ্রেণি	শ্রেণির মধ্যবিন্দু x_i	গণসংখ্যা f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
7–12	9.5	3	28.5	270.75
12–17	14.5	6	87.0	1261.50
17–22	19.5	11	214.5	4182.75
22–27	24.5	15	367.5	9003.75
27–32	29.5	19	560.5	16534.75
32–37	34.5	14	483.0	16663.50
37–42	39.5	12	474.0	18723.00
42–47	44.5	9	400.5	17822.25
47–52	49.5	5	247.5	12251.25
52–57	54.5	2	109.0	5940.50
		$N = \sum f_i = 96$	$\sum f_i x_i = 2972$	$\sum f_i x_i^2 = 102654$

গাণিতিক গড় $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N} = \dfrac{2972}{96} = 30.96$

সুতরাং ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \dfrac{102654}{96} - (30.96)^2$

$= 1069.3125 - 958.5216 = 110.7909 = 110.79$ (প্রায়)

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{110.79} = 10.53$ (প্রায়)

সম্ভাবনা

নমুনা ক্ষেত্র (Sample Space): কোনো পরীক্ষণ হতে প্রাপ্ত সম্ভাব্য সকল নমুনা বিন্দুর সেটকে নমুনা জগৎ বা নমুনা ক্ষেত্র বলে। যেমন– একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ করা হলো। একবার নিক্ষেপে প্রাপ্ত ফলাফল H অথবা T। সুতরাং তিনবার নিক্ষেপে প্রাপ্ত সম্ভাব্য ফলাফলগুলোর সেট $= \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$ যাকে তিনবার মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষণের নমুনা ক্ষেত্র বলা হয়।

সম্ভাবনা (Probability): কোনো পরীক্ষণের নমুনা ক্ষেত্র S-এ নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, $n(S) = m$ এবং S-এর অধীন একটি ঘটনা A-এর অনুকূল ফলাফলের সংখ্যা, $n(A) = n$ হলো, A ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনাকে $P(A)$ দ্বারা সূচিত করা হয় যার গাণিতিক পরিমাপ–

$$P(A) = \frac{A\text{-এর অনুকূল ফলাফলের সংখ্যা}}{\text{নমুনা ক্ষেত্রের মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা}} = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n}{m}$$

পরস্পর বর্জনশীল ও অবর্জনশীল ঘটনার জন্য সম্ভাবনার যোগসূত্র

কোনো পরীক্ষণের অধীন নুমনা ক্ষেত্র S-এর ক্ষেত্রে–

(i) যদি A ও B পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা হয়, হবে $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(ii) যদি A ও B পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা হয়, তবে $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

প্রমাণ:(i) মনে করুন, কোনো পরীক্ষণের নমুনা ক্ষেত্র S-এর মধ্যে A ও B দুইটি বর্জনশীল ঘটনা।

যেন, S নমুনা ক্ষেত্রের মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $= n(S)$.

A ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $= n(A)$.

এবং B ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $= n(B)$.

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}, \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}.$$

যেহেতু, A ও B পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা; তাই A ও B ঘটনা দুইটির কোনো সাধারণ নমুনা বিন্দু নেই।
সুতরাং $(A \cup B)$ ঘটনার অনুকূল ফলাফলের সংখ্যা,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

$$\therefore P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A) + n(B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} = P(A) + P(B)$$

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.(প্রমাণিত)।

(ii) মনে করুন, S নমুনা ক্ষেত্রের অধীনে A ও B দুইটি পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা এবং তাদের সাধারণ নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = x যদি নমুনা ক্ষেত্রের মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $= n(S) = n$
A ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $= n_A$.

B ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $= n_B$ হয়, তবে $P(A) = \frac{n_A}{n}$, $P(B) = \frac{n_B}{n}$, এবং $P(A \cap B) = \frac{x}{n}$.

সুতরাং $A \cup B$ ঘটনার অনুকূল ফলাফল সংখ্যা $= (n_A - x) + (n_B - x) + x = n_A + n_B - x$

$$\therefore \quad P(A \cup B) = \frac{n_A + n_B - x}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} - \frac{x}{n} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$\therefore \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$(প্রমাণিত)

উদাহরণ 1:52 খানা তাস উপযুক্তভাবে শাফল করে দৈবভাবে একখানা তাস বাছাই করা হলো:
(i) তাসটি টেক্কা হবার সম্ভাবনা কত?
(ii) তাসটি রুইতন অথবা টেক্কা হবার সম্ভাবনা কত?
(iii) তাসটি রাজা অথবা টেক্কা হবার সম্ভাবনা কত?

সমাধান: (i) 52 খানা তাসের মধ্যে 4টি টেক্কা।

$$\therefore \quad P(\text{টেক্কা}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

(ii) 52 খানা তাসের মধ্যে 13টি রুইতন, 4টি টেক্কা এবং 1টি রুইতনের টেক্কা।

$$\text{সুতরাং } P(\text{রুইতন অথবা টেক্কা}) = P(\text{রুইতন}) + P(\text{টেক্কা}) - P(\text{রুইতনের টেক্কা})$$

$$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$$

(iii) 52 খানা তাসের মধ্যে 4টি রাজা ও 4টি টেক্কা।

$$\therefore \quad P(\text{রাজা অথবা টেক্কা}) = P(\text{রাজা}) + P(\text{টেক্কা}) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$

THANKS