Md. Saiful Abedin
Junior Instructor (Mathematics)
Math - 1 (25911)

# ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক
# (Matrices and Determinants)

ইউনিট ১

## ভূমিকা

*ম্যাট্রিক্স এর ধারণা ব্যবহার করে সহজে এবং সংক্ষিপ্ত ভাবে তথ্য পরিবেশন করা যায়। ম্যাট্রিক্স এবং নির্ণায়কের ধারণা ব্যবহার করে বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যার সমাধান করা যায়। এই ইউনিটে ম্যাট্রিক্স এবং নির্ণায়ক সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।*

## ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- ম্যাট্রিক্স ও ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ বর্ণনা করতে পারবেন,
- ম্যাট্রিক্সের সমতা, যোগ, বিয়োগ ও গুণ করতে পারবেন,
- নির্ণায়ক কী ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- নির্ণায়কের মান নির্ণয় করতে পারবেন,
- নির্ণায়কের অনুরাশি ও সহগুণক ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- ব্যতিক্রমী ও অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- বর্গ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করতে পারবেন,
- নির্ণায়কের সাহায্যে একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় করতে পারবেন।

| ইউনিট সমাপ্তির সময় | ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ৭ দিন |
|---|---|

**এই ইউনিটের পাঠসমূহ**

পাঠ ১.১: ম্যাট্রিক্স ও এর প্রকারভেদ
পাঠ ১.২: ম্যাটিক্সের সমতা, যোগ, বিয়োগ এবং গুণ
পাঠ ১.৩: নির্ণায়কের ধারণা ও বিস্তৃতি
পাঠ ১.৪: নির্ণায়কের অনুরাশি এবং সহগুণক
পাঠ ১.৫: ব্যতিক্রমী ও অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স, বর্গ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়
পাঠ ১.৬: ক্রেমার নিয়মের সাহায্যে একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান

# পাঠ ১.১ ম্যাট্রিক্স ও এর প্রকারভেদ

## পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা বর্ণনা করতে পারবেন,
- বিভিন্ন প্রকার ম্যাট্রিক্স সম্মন্ধে লিখতে পারবেন।

| মুখ্য শব্দ | ম্যাট্রিক্স, রো-ম্যাট্রিক্স, বর্গ ম্যাট্রিক্স, মুখ্য কর্ণ, কর্ণ ম্যাট্রিক্স |
|---|---|

## মূলপাঠ

**ম্যাট্রিক্স (Matrix):** কতকগুলো সংখ্যার আয়তকার বিন্যাস হলো ম্যাট্রিক্স। [ ], ( ) বা || || প্রতীক দ্বারা ম্যাট্রিক্স প্রকাশ করা হয়।

যেমন – $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -7 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ একটি $3\times 3$ ম্যাট্রিক্স এবং $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$ একটি $2\times 4$ ম্যাট্রিক্স

ম্যাট্রিক্সের নিজের কোন মান নেই। যে সংখ্যা বা রাশি নিয়ে ম্যাট্রিক্স গঠিত হয় তাদেরকে ম্যাট্রিক্সের ভুক্তি (enrty) বা উপাদান (element) বলা হয়। অনুভূমিক বরাবর অবস্থিত ভুক্তি বা ভুক্তি সমূহকে ”সারি” এবং উলম্ব বরাবর অবস্থিত ভুক্তি বা ভুক্তি সমূহকে ”কলাম” বলা হয়।

$$\text{যেমন} - \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{১ম সারি} \\ \longrightarrow \text{২য় সারি} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{১ম কলাম} & \text{২য় কলাম} & \text{৩য় কলাম} & \text{৪র্থ কলাম} \end{array} \end{array}$$

**ম্যাট্রিক্সের ক্রম বা পর্যায় (Order of Matrix):** কোন ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যা $m$ এবং কলামের সংখ্যা $n$ হলে সেই ম্যাট্রিক্সের ক্রম হবে $m\times n$ ( $m$ বাই $n$ পড়তে হবে)।

**বর্গ ম্যাট্রিক্স (Square Matrix):** কোন ম্যাট্রিক্সের সারি এবং কলামের সংখ্যা সমান হলে তাকে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমন – $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ একটি $3\times 3$ বর্গ ম্যাট্রিক্স।

**রো-ম্যাট্রিক্স (Row Matrix):** একটি মাত্র সারি বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে সারি ম্যাট্রিক্স বা রো-ম্যাট্রিক্স বা সারি ভেক্টর বলা হয়। যেমন – $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

**কলাম-ম্যাট্রিক্স (Column Matrix):** একটি মাত্র কলাম বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে কলাম ম্যাট্রিক্স বা কলাম ভেক্টর বলা হয় ।

যেমন – $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$ একটি $3\times 1$ ম্যাট্রিক্স

**মূখ্য কর্ণ (Principal Diagonal):** কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের ১ম সারি এবং ১ম কলামের সাধারণ (common) ভূক্তি বরাবর কর্ণকে মূখ্য কর্ণ বলা হয়।

যেমন – $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ মূখ্য কর্ণ অর্থাৎ, $a_{11}$ , $a_{22}$ , $a_{33}$ মূখ্য কর্ণের উপাদান বা ভূক্তি।

**কর্ণ ম্যাট্রিক্স (Diagonal Matrix):** যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের মূখ্য কর্ণের ভূক্তি ব্যতিত সকল ভূক্তি শূন্য তাকে কর্ণ ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমন – $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ একটি $3 \times 3$ কর্ণ ম্যাট্রিক্স।

**স্কেলার ম্যাট্রিক্স (Scalar Matrix):** যে ম্যাট্রিক্সের মূখ্য কর্ণের ভূক্তিগুলো সমান তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলা হয় ।

যেমন – $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স।

**অভেদক ম্যাট্রিক্স (Identity or Unit Marix):** যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের মূখ্য কর্ণের ভূক্তি গুলো 1 এবং অবশিষ্ট ভূক্তি গুলো শূন্য তাকে অভেদক ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং $n$ পর্যায় বিশিষ্ট অভেদক ম্যাট্রিক্সকে $I_n$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন - $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ও $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ দুটি অভেদক ম্যাট্রিক্স।

**শূন্য ম্যাট্রিক্স (Null matrix or Zero Matrix):** যে ম্যাট্রিক্স এর সকল ভূক্তি শূন্য তাকে শূন্য ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমন- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ একটি $3 \times 3$ শূন্য ম্যাট্রিক্স।

### সারসংক্ষেপ

- কতগুলো সংখ্যাকে আয়তকারে সাজিয়ে উভয় পাশে [ ], ( ) বা || || প্রতীক দ্বারা আবদ্ধ করলে ম্যাট্রিক্স তৈরী হয়। ম্যাট্রিক্সের নিজের কোন মান নেই।
- কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের ১ম সারি এবং ১ম কলামের সাধারণ (common) ভূক্তি বরাবর কর্ণকে মূখ্য কর্ণ বলা হয়।
- একটি মাত্র কলাম বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে কলাম ম্যাট্রিক্স বা কলাম ভেক্টর বলা হয়।
- যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের মূখ্য কর্ণের ভূক্তি গুলো 1 এবং অবশিষ্ট ভূক্তি গুলো শূন্য তাকে অভেদক ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং $n$ পর্যায় বিশিষ্ট অভেদক ম্যাট্রিক্সকে $I_n$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

### পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.১

1. নিচের কোনটি রো-ম্যাট্রিক্স?

   (ক) $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ (খ) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$ (গ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ঘ) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের (i) ভূক্তি 6 (ii) সারি 2 (iii) কলাম 3, তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) (i) ও (ii) (খ) (ii) ও (iii) (গ) (i) ও (iii) (ঘ) (i), (ii) ও (iii)

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি একটি –

(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স

(ii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স

(iii) অভেদক ম্যাট্রিক্স

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) (i) ও (ii) (খ) (ii) ও (iii) (গ) (i) ও (iii) (ঘ) (i),(ii) ও (iii)

## পাঠ ১.২ ম্যাট্রিক্সের সমতা, যোগ, বিয়োগ এবং গুণ

### পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ম্যাট্রিক্সের যোগ, বিয়োগ ও গুণ নির্ণয় করতে পারবেন,
- বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে যোগ, বিয়োগ ও গুণ প্রয়োগ করতে পারবেন ।

| | |
|---|---|
| **মুখ্য শব্দ** | ম্যাট্রিক্সের সমতা, ম্যাট্রিক্সের স্কেলার গুণিতক, ম্যাট্রিক্সের গুণ |

### মূলপাঠ

**ম্যাট্রিক্সের সমতা (Equality of Matrix):** দুইটি ম্যাট্রিক্স সমান হবে যদি এবং কেবল যদি তাদের ক্রম সমান হয় এবং তাদের ভূক্তি গুলি সমান হয়।

যেমন - $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ও $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ হবে যদি এবং কেবল যদি $a = x, b = y$, $c = z$ এবং $d = w$ হয়।

**ম্যাট্রিক্সের যোগ ও বিয়োগ (Addition and Subtraction of Marix):** দুইটি ম্যাট্রিক্স $A$ এবং $B$ যোগের জন্য বা বিয়োগের জন্য উপযোগী হবে যদি তাদের ক্রম একই হয়। ম্যাট্রিক্স দ্বয়ের যোগফল বা বিয়োগফল অপর একটি ম্যাট্রিক্স হবে যার ক্রম (Order) $A$ এবং $B$ ম্যাট্রিক্সের অনুরূপ হবে। যোগফল বা বিয়োগফল সংশ্লিষ্ট অনুরূপ ভুক্তি গুলোর যোগফল বা বিয়োগফল।

যেমন - মনে করুন, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

অতএব, $A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+0 & 3+2 \\ 4-6 & -5+1 & 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ এবং

$$A-B=\begin{pmatrix}1-3 & -2-0 & 3-2\\ 4-(-6) & -5-1 & 6-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 10 & -6 & 4\end{pmatrix}$$

$$B-A=\begin{pmatrix}3-1 & 0+2 & 2-3\\ -6-4 & 1+5 & 2-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ -10 & 6 & -4\end{pmatrix}$$

$\therefore A+B\neq A-B\neq B-A$

**ম্যাট্রিক্সের স্কেলার গুণিতক (Scalar multiple of a Matrix):** $k$ একটি ধ্রুব (Constant) সংখ্যা এবং $A$ একটি ম্যাট্রিক্স হলে $kA$ এমন একটি ম্যাট্রিক্স যার প্রত্যেকটি ভুক্তি A এর প্রতিসঙ্গী ভূক্তির k গুণ।

যেমন - $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}$ হলে $kA=\begin{pmatrix}k.1 & k.2 & k.-3\\ k.4 & k.3 & k.0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k & 2k & -3k\\ 4k & 3k & 0\end{pmatrix}$

**ম্যাট্রিক্সের গুণ (Multiple of Matrix):** ম্যাট্রিক্স $A$ এবং $B$ দুইটি গুণ যোগ্য হবে যদি ১ম ম্যাট্রিক্স $A$ এর কলাম সংখ্যা ও ২য় ম্যাট্রিক্স $B$ এর সারির সংখ্যা সমান হয়। অন্যথায় তারা গুণযোগ্য হবে না।

যদি $A$ একটি $2\times 2$ ম্যাট্রিক্স এবং $B$ একটি $2\times 3$ ম্যাট্রিক্স হয় তবে $AB$ হবে $2\times 3$ ম্যাট্রিক্স।

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ এবং $B=\begin{pmatrix}x & y & p\\ z & w & q\end{pmatrix}$ হলে $AB=\begin{pmatrix}ax+bz & ay+bw & ap+bq\\ cx+dz & cy+dw & cp+dq\end{pmatrix}$ হবে।

**উদাহরণ 1:** $A=\begin{pmatrix}2 & -5 & 1\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ হলে

i. $A+B$ ii. $B+C$ iii. $C-A$ iv. $3A+4B-2C$ নির্ণয় করুন।

v. দেখান যে, $A+(B-C)=(A+B)-C$

**সমাধান:** (i) $A+B$

$$=\begin{pmatrix}2 & -5 & 1\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1 & -5-2 & 1-3\\ 3+0 & 0-1 & 4+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -7 & -2\\ 3 & -1 & 9\end{pmatrix}$$

(ii) $B+C=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1+0 & -2+1 & -3+2\\ 0+1 & -1-1 & 5+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & -2 & 6\end{pmatrix}$$

(iii) $C-A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -5 & 1\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}0-2 & 1+5 & 2-1\\ 1-3 & -1-0 & 1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 6 & 1\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

(iv) $3A+4B-2C$

$$=3\begin{pmatrix}2 & -5 & 1\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6 & -15 & 3\\ 9 & 0 & 12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -8 & -12\\ 0 & -4 & 20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6+4-0 & -15-8-2 & 3-12-4\\ 9+0-2 & 0-4+2 & 12+20-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -25 & -13\\ 7 & -2 & 30\end{pmatrix}$$

(v) বামপক্ষ $= A + (B - C)$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-0 & -2-1 & -3-2 \\ 0-1 & -1+1 & 5-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+1 & -5-3 & 1-5 \\ 3-1 & 0+0 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -4 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

ডানপক্ষ $= (A+B) - C$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \right\} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 3 & -1 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-0 & -7-1 & -2-2 \\ 3-1 & -1+1 & 9-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -4 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$\therefore A + (B - C) = (A + B) - C$ (প্রমাণিত)।

**উদাহরণ 2:** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ এবং $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ হলে প্রমাণ করুন যে, $(AB)C = A(BC)$ ।

**প্রমাণ:** $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times1+(-1)\times2 & 3-1 & 1-0 \\ 0\times1+2\times2 & 0+2 & 0+0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1-2 & 3-1 & 1-0 \\ 0+4 & 0+2 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times1+3\times2+1\times4 \\ 2\times1+1\times2+0\times4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6+4 \\ 2+2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$$

বামপক্ষ $= (AB)C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4+4 \\ 4+4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

ডানপক্ষ $= A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11-4 \\ 0+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

**উদাহরণ 3:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ হলে দেখান যে $A^2 + 2A - 11I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স ।

**সমাধান:** $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times1+4\times2 & 1\times2+2\times(-3) \\ 4\times1+(-3)\times4 & 4\times2+(-3)\times(-3) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1+8 & 2-6 \\ 4-12 & 8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

এখন, $A^2 + 2A - 11I = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} - 11\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 9+2-11 & -4+4 \\ -8+8 & 17-6-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**উদাহরণ 4:** কোন একটি দোকানের তিন দিনের বিভিন্ন ব্রান্ডের কলম বিক্রয়ের তথ্য নিম্নের তালিকায় দেখানো হলো ঃ

| কলমের সংখ্যা | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | পাইলট | ইয়োথ | মনটেক্স | ম্যাটাডোর |
| ১ম দিন | 3 | 4 | 10 | 20 |
| ২য় দিন | 2 | 3 | 15 | 20 |
| ৩য় দিন | 1 | 5 | 12 | 14 |
| প্রতিকলমে লাভ(টাকায়) | 0.50 | 0.75 | 0.50 | 0.40 |

ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে দোকানের তিন দিনের লাভ নির্ণয় করুন।

**সমাধানঃ** $P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 10 & 20 \\ 2 & 3 & 15 & 20 \\ 1 & 5 & 12 & 14 \end{pmatrix}$ , $Q = \begin{pmatrix} 0.50 \\ 0.75 \\ 0.50 \\ 0.40 \end{pmatrix}$ এবং

মোট লাভ $= P \times Q$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 10 & 20 \\ 2 & 3 & 15 & 20 \\ 1 & 5 & 12 & 14 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.50 \\ 0.75 \\ 0.50 \\ 0.40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5+3+5+8 \\ 1+2.25+7.5+8 \\ .50+3.75+6+5.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.5 \\ 18.75 \\ 15.85 \end{pmatrix}$$

## পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.২

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ হলে

   $(i)\ 3A - 4B$ $\quad (ii)\ A + B$ $\quad (iii)\ B - A$ এর মান নির্ণয় করুন।

2. মান নির্ণয় করুনঃ $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ।

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ হলে, $AB$ ও $BA$ নির্ণয় করুন।

4. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ হলে, প্রমাণ করুন $AB \neq BA$ ।

# পাঠ ১.৩ নির্ণায়কের ধারণা ও বিস্তৃতি

## পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- নির্ণায়ক কী ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- নির্ণায়কের মান নির্ণয় করতে পারবেন।

| মুখ্য শব্দ | নির্ণায়ক, নির্ণায়কের বিস্তৃতি |
|---|---|

## মূলপাঠ

**নির্ণায়কের সংজ্ঞা:** আমরা আগের পাঠগুলোতে ম্যাট্রিক্স সমন্ধে জেনেছি। কোন ম্যাট্রিক্সকে যেমন $\left[a_{ij}\right]$ বা $\left(a_{ij}\right)$ বা $\left\|a_{ij}\right\|$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যেখানে $i=1,2,3,\ldots\ldots..,m$; $j=1,2,3,\ldots\ldots..,n$ । তেমনি নির্ণায়ককে $\left|a_{ij}\right|$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ একটি $2\times 2$ বর্গ ম্যাট্রিক্স এর সংশ্লিষ্ট নির্ণায়ক হবে $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$ । দুইটি সারি ও দুইটি কলাম আছে বিধায় একে দ্বিতীয় পর্যায়ের নির্ণায়ক বলে।

নির্ণায়কের মান আছে যদিও ম্যাট্রিক্সের মান নেই। নির্ণায়কের ক্ষেত্রে সারির সংখ্যা এবং কলামের সংখ্যা সমান হতে হয়।

নির্ণায়কের বিস্তৃতি $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ এর মান

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

যেমন: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 12 = 24$

$3\times3$ আকারের $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের মান

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

যেমন: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$

$$= 2(6+4) - 3(18-8) + 1(-6-4) = 2\times10 - 3\times10 + 1\times(-10)$$
$$= 20 - 30 - 10) = 20 - 40 = -20$$

# পাঠ ১.৪ নির্ণায়কের অনুরাশি এবং সহগুণক

## পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- নির্ণায়কের মৌলিক গুণাবলী লিখতে পারবেন,
- অনুরাশি ও সহগুণক এর ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- অনুরাশি এবং সহগুণকের সাহায্যে নির্ণায়কের বিস্তৃতি নির্ণয় করতে পারবেন।

| মুখ্য শব্দ | অনুরাশি, সহগুণক |
|---|---|

## মূলপাঠ

**নির্ণায়কের অনুরাশি এবং সহগুণক:** যে সকল সংখ্যা বা প্রতীক দ্বারা নির্ণায়ক গঠন করা হয় তারা নির্ণায়কের ভূক্তি। প্রত্যেক ভূক্তি যে সারি এবং কলামে অবস্থান করে সেই সারি ও কলাম বাদ দিয়ে অবশিষ্ট নির্ণায়কই ঐ ভূক্তির অনুরাশি। উপযুক্ত চিহ্ন সহ অনুরাশিকে বলা হয় সহগুণক।

ম্যাট্রিক্স $\left(a_{ij}\right)$ এ $a_{ij}$ এর সহগুণক হবে $(-1)^{i+j}a_{ij}$ ।

যেমন- $|D| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের একটি ভূক্তি $-4$ এর অবস্থান ১ম সারি ও ২য় কলাম

$\therefore -4$ এর অনুরাশি = ১ম সারি ও ২য় কলাম বাদ দিয়ে উৎপন্ন নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = (-3).9 - 6.1 = -27 - 6 = -33$

$-4$ এর সহগুণক $= (-1)^{1+2} \times -4$ এর অনুরাশি $= (-1) \times (-33) = 33$

অনুরূপ ভাবে $1$ এর অনুরাশি $= \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 14 - (-24) = 14 + 24 = 38$

$1$ এর সহগুণক $= (-1)^{2+3} \times 1$ এর অনুরাশি $= (-1) \times 38 = -38$

**অনুরাশি ও সহগুণকের সাহায্যে নির্ণায়কের বিস্তৃতি:** কোন নির্ণায়কের যে কোন সারি বা কলামের ভূক্তিসমূহ ও তাদের নিজ নিজ সহগুণকের সমষ্টিই নির্ণায়কের মান।

$2 \times 2$ আকারের নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{13}$ ভূক্তিগুলির সহগুণক যথাক্রমে $A_1$, $A_2$, $A_3$ হলে নির্ণায়কের মান হবে

$a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

তৃতীয় মাত্রার নির্ণায়কের চিহ্ন $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

**নির্ণায়কের ধর্মাবলী:**

(i) যদি কোন নির্ণায়কের কোন কলাম বা সারির প্রত্যেক ভূক্তি শূন্য হয় তবে নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

যেমন − $\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$ , $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

(ii) নির্ণায়কের সারিকে কলাম বা কলামকে সারিতে পরিবর্তন করলে নির্ণায়কের মানের কোন পরিবর্তন হয় না।

যেমন− $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

(iii) নির্ণায়কের দুটি কলাম বা সারি পরস্পর স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের সংখ্যামানের চিহ্নের পরিবর্তন হয়।

যেমন− $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$

(iv) যদি কোন নির্ণায়কের দুইটি সারি বা কলাম একই হয় বা একটি অন্যটির গুণিতক হয় তবে নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

যেমন− $\begin{vmatrix} a & a & c \\ a & a & f \\ a & a & e \end{vmatrix} = 0$ , $\begin{vmatrix} a & na & c \\ a & na & f \\ a & na & e \end{vmatrix} = 0$

(v) নির্ণায়কের কোন সারি বা কলাম প্রত্যেক ভূক্তিকে কোন সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে নির্ণায়কের মানকেও সেই সংখ্যা দ্বারা গুণ করতে হয়।

যেমন − $A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ হলে $\begin{vmatrix} ma_1 & b_1 & c_1 \\ ma_2 & b_2 & c_2 \\ ma_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = mA$

(vi) কোন নির্ণায়কের কোন একটি সারি বা কলামের ভূক্তিগুলোকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করে অপর একটি সারি বা কলামের ভূক্তিগুলোর সাথে যোগ বা বিয়োগ করলে যে নির্ণায়ক উৎপন্ন হয় তার মান প্রথমোক্ত নির্ণায়কের মানের সমান।

যেমন − $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + nb_1 & b_1 - mc_1 & c_1 \\ a_2 + nb_2 & b_2 - mc_2 & c_2 \\ a_3 + nb_3 & b_3 - mc_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(vii) যদি কোন নির্ণায়কের কোন কলাম বা সারির প্রত্যেক ভূক্তি দুটি পদের যোগফল বা বিয়োগফল রূপে প্রকাশিত হয়, তবে সেই নির্ণায়ককে দুইটি নির্ণায়কের যোগফল বা বিয়োগফল রূপে প্রকাশ করা যায়।

যেমন- $D = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 + b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$

একইভাবে, $\begin{vmatrix} a_1+\alpha & b_1+\beta & d_1+\gamma \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

**উদাহরণ 1:** $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয় করুন।

**সমাধানঃ** $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$

১ম কলাম থেকে ২য় ও ৩য় কলামের যোগফল বিয়োগ করে প্রদত্ত নির্ণায়ক

$$= \begin{vmatrix} x+y-x-y & x & y \\ x-x-2z & x+z & z \\ y-2z-y & z & y+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -2z & x+z & z \\ -2z & z & y+z \end{vmatrix}$$

২য় সারি থেকে ৩য় সারি বিয়োগ করে

$$= \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & x & -y \\ -2z & z & y+z \end{vmatrix} = -2z \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & x & -y \\ 1 & z & y+z \end{vmatrix} = -2z \begin{vmatrix} x & y \\ x & -y \end{vmatrix}$$

$$= -2z(-xy-xy) = -2z \times (-2xy) = 4xyz$$

**উদাহরণ 2:** $\begin{vmatrix} 67 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 81 & 24 & 26 \end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয় করুন।

**সমাধানঃ** প্রদত্ত নির্ণায়কঃ $\begin{vmatrix} 67 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 81 & 24 & 26 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 67-3\times19 & 19 & 21 \\ 39-3\times13 & 13 & 14 \\ 81-3\times24 & 24 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 19 & 21 \\ 0 & 13 & 14 \\ 9 & 24 & 26 \end{vmatrix} \quad (c_1' = c_1 - 3c_2)$$

$$= \begin{vmatrix} 10 & 19 & 21-19 \\ 0 & 13 & 14-13 \\ 9 & 24 & 26-24 \end{vmatrix} \quad (c_3' = c_3 - c_2)$$

$$= \begin{vmatrix} 10 & 19 & 2 \\ 0 & 13 & 1 \\ 9 & 24 & 2 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 24 & 2 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 19 & 2 \\ 13 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 10(26-24) + 9(19-26) = 10\times2 + 9\times(-7) = 20 - 63 = -43$$

**উদাহরণ 3:** প্রমাণ করুনঃ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c)(c-a)$

**সমাধানঃ** বাম পক্ষ $= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$$= abc\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix} \qquad (c_1' = c_1 - c_2 \quad \& \quad c_2' = c_2 - c_3)$$

$$= abc(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b & b+c \end{vmatrix}$$

$= abc(a-b)(b-c)(b+c-a-b) = abc(a-b)(b-c)(c-a) =$ ডান পক্ষ (প্রমাণিত)

**উদাহরণ 4:** প্রমাণ করুন: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix} = p(p-1)^2(p^2-1)$

**সমাধান:** বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 \\ 1 & p-1 & p^2-p \\ 1 & p^2-1 & p^4-p^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & p-1 & p(p-1) \\ 1 & p^2-1 & p^2(p^2-1) \end{vmatrix} \quad (c_2' = c_2 - c_1 \quad \& \quad c_3' = c_3 - c_2)$$

$$= p(p-1)(p-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & p+1 & p(p+1) \end{vmatrix} = p(p-1)^2\{p(p+1)-(p+1)\}$$

$= p(p-1)^2(p^2+p-p-1) = p(p-1)^2(p^2-1) =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

## পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৪

প্রমাণ করুন:

1. $\begin{vmatrix} 2a & 2b & a+b \\ b+c & a-c & a \\ b-c & a+c & b \end{vmatrix} = -2(a+b)(a-b)^2$

2. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^2$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \end{vmatrix} = 0$

4. $\begin{vmatrix} -x^2 & xy & xz \\ xy & -y^2 & yz \\ xz & xy & -z^2 \end{vmatrix} = 4x^2y^2z^2$

5. $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$

6. $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = -2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

7. $\begin{vmatrix} (q+r)^2 & p^2 & p^2 \\ q^2 & (r+p)^2 & q^2 \\ r^2 & r^2 & (p+q)^2 \end{vmatrix} = 2pqr(p+q+r)^3$

## পাঠ ১.৫ ব্যতিক্রমী ও অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স, বর্গ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়

### পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ব্যতিক্রমী ও অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা লিখতে পারবেন,
- বর্গ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করতে পারবেন,
- অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করতে পারবেন।

| মুখ্য শব্দ | ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স, অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স, ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স, প্রতিসম ম্যাট্রিক্স, বর্গ ম্যাট্রিক্স |
|---|---|

### মূলপাঠ

**ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স (Singular Matrix):** কোন বর্গ ম্যাটিক্সের নির্ণায়কের মান শূন্য হলে ম্যাট্রিক্সটিকে ব্যতিক্রমী বা সিংগুলার ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমন - $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$ একটি সিংগুলার ম্যাট্রিক্স।

যেখানে, $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = -24 + 24 = 0$

**অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স (Non Singular Matrix):** কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান অশূন্য হলে ম্যাট্রিক্সটিকে অব্যতিক্রমী বা নন সিংগুলার ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমন- $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ একটি $2 \times 2$ অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

যেখানে, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$ যা অশূন্য।

**উদাহরণ 1:** $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2x & -6 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে $x$ এর মান নির্ণয় করুন।

**সমাধানঃ** প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2x & -6 \end{bmatrix}$

সুতরাং, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2x & -6 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 2(-6) - (-2x).3 = 0$

$\Rightarrow -12 + 6x = 0$

$\Rightarrow 6x = 12$

$\therefore x = 2$

**ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স (Transpose of a Matrix)**: কোন ম্যাট্রিক্সের সারিগুলো কলাম ও কলামগুলো সারিতে পরিণত করে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স বলা হয়। $A$ এর ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্সকে $A^T$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন − $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ এর ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

**প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Symetric Matrix)**: কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স $A$ এর ক্ষেত্রে যদি $A^T = A$ হয় তবে $A$ কে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমন $A = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}$ এটি একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স কেননা, $A^T = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix} = A$

**আইডেমপোটেন্ট ম্যাট্রিক্স (Idempotent Matrix)**: কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স এর জন্য $A^2 = A$ হলে ম্যাট্রিক্সটিকে আইডেমপোটেন্ট ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমন − $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ একটি $2 \times 2$ আইডেমপোটেন্ট ম্যাট্রিক্স।

**অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স (Adjoint Matrix)**: কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স দ্বারা গঠিত নির্ণায়ক $|A|$ এর সহগুণক দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্সের ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্সকে $A$ এর অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স বলা হয়। অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্সকে $Adj(\mathrm{A})$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

**বিপরীত ম্যাট্রিক্স (Inverse of a Matrix)**: কোন অব্যতিক্রমী (Non Singular) ম্যাট্রিক্স $A$ এর অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্সকে তার নির্ণায়ক $|A|$ এর মান দ্বারা ভাগ করে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে $A$ ম্যাট্রিক্স এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলা হয়। ইহাকে $A^{-1}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$\therefore A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$$

**উদাহরণ 2:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করুন।

**সমাধানঃ** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ এর নির্ণায়ক

$|A| = 1(4+5)-0(-4-15)-4(2-6) = 9+0+16=25$

$|A|$ এর সহগুণক গুলি,

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4+5=9$ , $A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-4-15)=19$ , $A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2-6=-4$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(0-4)=4$ , $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2+12=14$ , $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-0)=1$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 0+8=8,$ $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -(5-8)=3$ , $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2-0=2$

$$\therefore Adj\ A = \begin{bmatrix} 9 & 19 & -4 \\ 4 & 14 & 1 \\ 8 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 8 \\ 19 & 14 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 9 & 4 & 8 \\ 19 & 14 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**উদাহরণ 3:** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করুন।

**সমাধানঃ** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ এর নির্ণায়ক,

$|A| = 0(2-3)-1(1-9)+2(1-6) = 0+8-10=-2$

$|A|$ এর সহগুণক গুলি,

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-3=-1$ , $A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1-9)=8$ , $A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1-6=-5$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-2)=1$ , $A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0-6=-6$ , $A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(0-3)=3$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-4=-1,$ $A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(0-2)=2$ , $A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0-1=-1$

$$\therefore Adj\ A = \begin{bmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-1 & 4 & 1\\ 8 & -6 & 2\\ -5 & 3 & -1\end{bmatrix}$$

**উদাহরণ 4:** $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ হলে প্রমাণ করুন, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB=\begin{bmatrix}1\times(-2)+(-1)\times 1 & 1\times 1+(-1)\times(-1)\\ 0\times(-2)+(-2)\times 1 & 1\times 0+(-2)\times(-1)\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB=\begin{bmatrix}-2-1 & 1+1\\ 0-2 & 0+2\end{bmatrix}$$

$$\therefore AB=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -2 & 2\end{bmatrix}$$

$$|AB|=(-3)\times 2-2\times(-2)$$

$$\Rightarrow |AB|=-6+4$$

$$\therefore |AB|=-2$$

$$A_{11}=2, A_{12}=-(-2)=2, A_{21}=-(2)=-2, A_{22}=-3$$

সুতরাং, $adj\ AB=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -2 & -3\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & -3\end{bmatrix}$

$$\therefore (AB)^{-1}=\frac{1}{|AB|}adj(AB)=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-2+0=-2$$

$$A_{11}=-2, A_{12}=-(0)=0, A_{21}=-(-1)=1, A_{22}=1$$

$$adj(A)=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{-2}\\ 0 & \frac{1}{-2}\end{bmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2-1=1$$

$$A_{11}=-1, A_{12}=-1, A_{21}=-1, A_{22}=-2$$

$$adj(B)=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\therefore B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B^{-1}.A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{-2} \\ 0 & \frac{1}{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.1+(-1).0 & (-1).(\frac{1}{-2})+(-1).(\frac{1}{-2}) \\ -1.1+(-2).0 & (-1).(\frac{1}{-2})+(-2).(\frac{1}{-2}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2}+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$\therefore (AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ (প্রমাণিত)

## পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৫

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ এর $A^T$ মান নিচের কোনটি?

(ক) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ (খ) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ (গ) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ (ঘ) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} m-3 & 6 \\ 5 & m-4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে m এর মান নিচের কোন দুইটি?

(ক) 1,-2 (খ) 9, -2 (গ) -9,2 (ঘ)-9,-2

3. $\begin{bmatrix} 5+t & -2 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে $x$ এর মান নির্ণয় করুন।

(ক) 6 (খ) -6 (গ) 9 (ঘ)-9

4. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নিচের কোনটি?

(ক) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ (খ) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ (গ) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (ঘ) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি কোন প্রকৃতির?

**(ক)** অভেদকঘাতি (খ) প্রতিসম (গ) স্কেলার (ঘ) সমঘাতি

6. নিচের কোনটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স?

(ক) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (খ) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (গ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (ঘ) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

7. দেখান যে, $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ একটি আইডেমপোটেন্ট ম্যাট্রিক্স।

## পাঠ ১.৬ ক্রেমার নিয়মের সাহায্যে একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান

### পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ক্রেমারের নিয়ম কি তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- ক্রেমারের নিয়মের সাহায্যে একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় করতে পারবেন।

| মুখ্য শব্দ | ক্রেমারের নিয়ম, সমীকরণ জোট |
|---|---|

### মূলপাঠ

নির্ণায়কের সাহায্যে একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয়:

**ক্রেমারের নিয়ম (Cramer's Rule):**

মনে করুন, $a_1x+b_1y=c_1$...........(i)

$a_2x+b_2y=c_2$...........(ii)

একটি সমীকরণ জোট-

$$(\text{i})\times b_2 \Rightarrow a_1b_2x+b_1b_2y=c_1b_2 \text{...........(iii)}$$

$$(\text{ii})\times b_1 \Rightarrow a_2b_1x+b_1b_2y=c_2b_1 \text{...........(iv)}$$

$$(\text{iii})-(\text{iv}) \Rightarrow x(a_1b_2-a_2b_1)=b_2c_1-b_1c_2$$

$$\therefore x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{D_x}{D}, \text{ যখন } D\neq 0$$

একই পদ্ধতিতে ত্রিচলক বিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান পাওয়া যায়।

$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$...........(i)

$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$...........(ii)

$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$.......... .(iii)

**সমাধান:** $D=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, $D_x=\begin{bmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, $D_y=\begin{bmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{bmatrix}$ এবং $D_z=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{bmatrix}$

$$\therefore x=\frac{D_x}{D}\text{ , , } y=\frac{D_y}{D} \text{ এবং } z=\frac{D_z}{D}$$

বি:দ্র: $|D|=0$ হলে সমীকরণ জোটের সমাধান থাকবে না বা অসংখ্য সমাধান থাকবে যা এই সূত্রের সাহায্যে সমাধান নির্ণয় করা যায় না।

**উদাহরণ 1:** নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান করুন, $2x+3y=4$

$x-y=7$

**সমাধান:** $2x + 3y = 4$

$x - y = 7$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 21 = -25$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 4 = 14 - 4 = 10$$

$$\therefore x = \frac{D_x}{D} == \frac{-25}{-5} = 5 \quad , y = \frac{D_y}{D} = \frac{10}{-5} = -2$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (5, -2)$

**উদাহরণ 2:** নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান করুন,

$x + y + z = 1$

$x + 2y + z = 2$

$x + y + 2z = 0$

**সমাধান:** $x + y + z = 1$

$x + 2y + z = 2$

$x + y + 2z = 0$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(4-1) - 1(2-1) + 1(1-2) = 3 - 1 - 1 = 1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(4-1) - 1(4-0) + 1(2-0) = 3 - 4 + 2 = 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(4-0) - 1(2-1) + 1(0-2) = 4 - 1 - 2 = 1$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(0-2) - 1(0-2) + 1(1-2) = -2 + 2 - 1 = -1$$

$$\therefore x = \frac{D_x}{D} == \frac{1}{1} = 1 \quad , y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{1} = 1 \quad , z = \frac{D_z}{D} = \frac{-1}{1} = -1$$

## পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৬

বহু নির্বাচনি প্রশ্ন:

নিচের তথ্যের আলোকে $(1 - 3)$ নং প্রশ্নের উত্তর দিন:

$$A = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

1. ১ম সারি ও ২য় কলাম এর অনুরাশির মান কোনটি?

(ক) $-8$ (খ) $8$ (গ) $-9$ (ঘ) $9$

2. ৩য় সারি ও ৩য় কলাম এর অনুরাশির মান কোনটি?

(ক) $11$ (খ) $20$ (গ) $18$ (ঘ) $-10$

3. নির্ণায়ক $|A|$ এর মান কোনটি?

(ক) $65$ (খ) $-65$ (গ) $56$ (ঘ) $-56$

সৃজনশীল প্রশ্ন:

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}$

(ক) উপরের ম্যাট্রিক্সগুলির আলোকে $AB$ এর মান নির্ণয় করুন।

(খ) $ABC$ এর মান নির্ণয় করুন এবং

(গ) দেখান যে, $(AB)C = A(BC)$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 7 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(ক) $A^T$ ও $B^T$ এর মান নির্ণয় করুন।

(খ) $AB$ এর মান নির্ণয় করুন এবং

(গ) দেখান যে, $(AB)^T = (BA)^T$

6. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} x & 2 & -2 \\ y & 5 & -4 \\ z & 7 & -5 \end{bmatrix}$

(ক) $AB = I_3$ হলে $x, y, z$ সম্বলিত সমীকরণ গঠন করুন।

(খ) $x, y, z$ এর মান ক্রেমার পদ্ধতিতে নির্ণয় করুন এবং $B$ ম্যাট্রিক্সটি তৈরি করুন।

(গ) $AB$ নির্ণয় করুন এবং $A$ ও $B$ এর মধ্যে সম্পর্ক নিরূপণ করুন।

## উত্তরমালা

**পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.১**

1. (খ) 2. (ঘ) 3. (ঘ)

**পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.২**

1. $(i) \begin{bmatrix} -13 & -3 & 18 \\ 4 & 17 & 0 \end{bmatrix}$ $(ii) \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ $(iii) \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -5 & -1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -13 & -3 & 18 \\ 4 & 17 & 0 \end{bmatrix}$ 5. $AB = \begin{bmatrix} 16 & -9 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ এবং $BA = \begin{bmatrix} 4 & 24 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

**পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৫**

1. গ 2. খ 3. খ 4. ঘ 5. খ 6. (ক)

**পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৬**

1. ক 2. গ 3. ঘ 4. 5.

MD. SAIFUL ABEDIN
Junior Instructor (Mathematics)
Math - 1 (25911)

# বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ

ইউনিট ৩

## ভূমিকা

*বহুপদী এক ধরনের বীজগাণিতিক রাশি। এরূপ রাশিতে এক বা একাধিক পদ থাকতে পারে। বহুপদীর বিভিন্ন পদগুলো এক বা একাধিক চলকের শুধুমাত্র ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যক ঘাত ও ধ্রুবকের গুণফল দ্বারা গঠিত। বর্তমান ইউনিটে বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।*

## উদ্দেশ্য

*এই ইউনিট শেষে আপনি-*

- *বহুপদী সম্পর্কে জানতে এবং বহুপদীর ঘাত নির্ণয় করতে পারবেন।*
- *বহুপদী সমীকরণের ঘাত নির্ণয় এবং মূল সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন।*
- *মূল ও সহগের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় এবং তা প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।*
- *মূলের প্রকৃতি নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।*
- *দ্বিঘাত সমীকরণে মূল দেওয়া থাকলে তার সাহায্যে সমীকরণ গঠনের দক্ষতা অর্জন করবেন।*
- *দুটি দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ মূল থাকার শর্ত নির্ণয় এবং তা প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন।*
- *দ্বিঘাত ও ত্রিঘাত সমীকরণের মূলের প্রতিসম রাশির মান নির্ণয় ও তা প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন।*

## পাঠ ১ বহুপদী ও তার ঘাত

### উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বীজগাণিতিক রাশি ও বহুপদী কী বলতে পারবেন,
- বহুপদীর ঘাত কী বলতে পারবেন,
- বীজগাণিতিক রাশি ও বহুপদীর মধ্যে সম্পর্ক বর্ণনা করতে পারবেন।

### বীজগাণিতিক রাশি ঃ

বীজগণিতে শূন্যসহ ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সকল সংখ্যা ব্যবহৃত হয়। বীজগণিতে নির্দিষ্ট মানের সংখ্যা ছাড়াও $a, b, c, x, y, z, \alpha, \beta$ - - - - - - - প্রভৃতি বর্ণমালার অক্ষরসমূহ অনির্দিষ্ট সংখ্যামানের প্রতীকরূপে ব্যবহৃত হয়।

এক বা একাধিক সংখ্যা ও সংখ্যা নির্দেশক প্রতীককে যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ, ঘাত বা মূল চিহ্নের যে কোন একটি অথবা একাধিকের সাহায্যে অর্থবহভাবে সংযুক্ত করলে যে নতুন সংখ্যা নির্দেশক প্রতীকের সৃষ্টি হয়, তাকে বীজগাণিতিক রাশি (Algebraic expression) বা সংক্ষেপে রাশি বলা হয়। এখানে সংখ্যা বলতে বাস্তব সংখ্যাকেই বুঝায়। যেমন-$3x$, $2x+3az$, $5x^4+2x^2-7$, $x+y-7$, $\sqrt[3]{x^3+5}$, $(2x-y)^2+\sqrt{z}$, $\dfrac{x-5}{x^2+2x-5}$, $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$ ইত্যাদি প্রত্যেকেই এক একটি বীজগাণিতিক রাশি। এই উদাহারণগুলোতে $x$ হল চলক।

**বহুপদী (Polynomial) ঃ**

বহুপদী বিশেষ ধরনের বীজগাণিতিক রাশি। এরূপ রাশিতে এক বা একাধিক পদ থাকে এবং পদগুলো এক বা একাধিক চলকের শুধুমাত্র ধনাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক ঘাত ও ধ্রুবকের গুণফল হয়। যেমন, $2x-3$, $4x^2-3x+7$, $x^2-3xy+4y^2$, $x^3-3x^2y+xy^2+2y^7$ ইতাদি প্রত্যেকেই এক একটি বহুপদী। এখানে $x, y$ হল চলক। বহুপদীতে চলক দ্বারা ভাগ করা যায় না। অর্থাৎ চলক কখনও হরে অবস্থান করতে পারে না।

যেমন, $\sqrt{2x}-\dfrac{3}{x}+5$, $\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}$, $\sqrt{x^2-3x+1}$ এই বীজগাণিতিক রাশিগুলো বহুপদী নয়।

বহুপদী অনেক ধরনের হতে পারে। যেমন, এক চলকের বহুপদী, দুই চলকের বহুপদী ইত্যাদি। শুধুমাত্র একটি চলক দ্বারা গঠিত বহুপদীকে এক চলকের বহুপদী বলা হয়। দুটি চলক দ্বারা গঠিত বহুপদীকে দ্বিচলকের বহুপদী বলা হয়।

ধরুন, $x$ একটি চলক। তাহলে $ax+b$, $ax^2+bx+c$, $ax^3+bx^2+cx+d$ ইত্যাদি আকারের রাশিকে একটি চলক $x$ এর বহুপদী বলা যায়, যেখানে $a, b, c, d$ ইত্যাদি ধ্রুবক বা সংখ্যা নির্দেশ করে।

অনুরূপভাবে, $x^2-2xy+3y^2$ একটি দ্বিচলক বহুপদী। এক্ষেত্রে চলকদ্বয় হল $x$ এবং $y$।

আবার $x^2-2xy+3z^2-4xyz$ হল একটি তিন চলকের বহুপদী। এক্ষেত্রে চলকত্রয় হল $x, y, z$.

**বহুপদী বিশেষ ধরনের বীজগাণিতিক রাশি। এরূপ রাশিতে এক বা একাধিক পদ থাকে এবং পদগুলো এক বা একাধিক চলকের শুধুমাত্র ধনাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক ঘাত ও ধ্রুবকের গুণফল হয়।**

**বহুপদীর ঘাত (Degree of a Polynomial)**

বহুপদীর সংজ্ঞা থেকে আমরা বলতে পারি, $a_0, a_1, a_2,$ - - - - - $a_n$ ধ্রুবক (সংখ্যা) হলে

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n$ একটি বহুপদী যার চলক $x$.

এখন $a_0 \neq 0$ হলে প্রদত্ত বহুপদীতে $x$ চলকটির সর্বোচ্চ ঘাত $n$.

সুতরাং $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+ - - - - - +a_n$, যেখানে $a_0$, $a_1$, $a_2$, - - - - $a_n$ ধ্রুবক এবং $a_0 \neq 0$ একটি $n$ ঘাতবিশিষ্ট বহুপদী।

এক চলকের কোন বহুপদীতে চলকের বৃহত্তম ঘাতই ঐ বহুপদীর ঘাত নির্দেশ করে।

যেমন, $x^4+3x^2+2x+3$ এই বহুপদীটি একটি মাত্র চলক $x$ এর বহুপদী। এখানে চলক $x$ এর সর্বোচ্চ ঘাত 4।

সুতরাং $x^4+3x^2+2x+3$ বহুপদীর ঘাত 4।

**উদাহরণ ঃ**

| বহুপদী | বহুপদীর ঘাত |
|---|---|
| $x^3-3x^2+2$ | 3 |
| $x^9+2$ | 9 |
| $3x+2$ | 1 |
| 4 | 0 |

উল্লেখ্য যে কোন ধ্রুবকের ঘাত 0, কেননা যদি $c$ একটি ধ্রুবক হয়, তাহলে $c$ কে $cx^{\circ}$ লেখা যায় (কারণ $x^{\circ}=1$)। এক্ষেত্রে $x$ এর ঘাত 0 (শূন্য)। সুতরাং $c$ ধ্রুবকটির ঘাত শূন্য।

একাধিক চলকবিশিষ্ট বহুপদীর ঘাত নির্ণয়ের নিয়মটি একটু ভিন্ন।

$ax^{\mathrm{m}}\mathrm{y}^n$ কোন বহুপদীর একটি পদ হলে $(\mathrm{m}+n)$ কে ঐ পদের ঘাত বলে। একাধিক চলকবিশিষ্ট বহুপদীর কোন পদের উচ্চতম ঘাতকে বহুপদীর ঘাত বলে। নিচে উদাহরণ দিয়ে বিষয়টি আলোচনা করা হলো ঃ

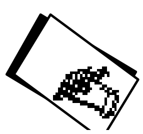
মনে করুন, $x^2+2x\mathrm{y}^2+5\mathrm{y}$ একটি বহুপদী। এর চলকদ্বয় হল $x$ এবং y।

এখানে ১ম পদ হল $x^2$, এর ঘাত $=2$

দ্বিতীয় পদ $2x\mathrm{y}^2$, এর ঘাত $= 1+2 = 3$

তৃতীয় পদ $5\mathrm{y}$, এর ঘাত $= 1$

সেহেতু বহুপদীতে পদগুলোর বিভিন্ন ঘাতের মধ্যে সর্বোচ্চ ঘাত 3, সুতরাং বহুপদীর ঘাত =3.



## অনুশীলনী-৩.১

1. নিচের কোনটি বহুপদী এবং কোনটি বহুপদী নয় কারণসহ লিখুন ঃ

   (i) $x^2-3x+2$, (ii) $\dfrac{x^2-3}{x+1}$ (iii) $6x^3-\sqrt{2}\,x+\dfrac{1}{3}$

   (iv) $\sqrt{2}\,x-\dfrac{3}{x^2}+5$ (v) $3x^2-2xy+y^2$

   (vi) $\sqrt{x^2-3x+1}$

2. নিম্নলিখিত বহুপদীগুলোর প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদের ঘাত বের করুন ঃ

   (i) $3x^5-6x^3+5$

   (ii) $6x^4y^2 - 3xy^3$

   (iii) $5x + 2y+3y^2$

3. নিম্নলিখিত বহুপদীগুলোর ঘাত নির্ণয় করুন ঃ

   (i) $5x^3y - 2xy - x3y^2 - 2x^3$

   (ii) $3x^4-2x^3-4x^2+9$

   (iii) $3x^2-4x+xy^9+x^2y^3z^{10}$

## পাঠ ২ বহুপদী সমীকরণ

### উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বহুপদী সমীকরণ কী জানতে পারবেন,
- বহুপদী সমীকরণের ঘাত নির্ণয়ের দক্ষতা অর্জন করবেন
- বহুপদী সমীকরণের মূলের ধারণা লাভ করবেন।

মনে করুন, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \text{- - - - - - -} + a_n$, যেখানে $a_0, a_1, a_2$, ------, $a_n$ ধ্রুবক এবং $a_0 \neq 0$.
যদি $f(x) = 0$ অর্থাৎ $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \text{- - - -} + a_n = 0$ .........(i) হয় তাহলে (i) নং কে একটি বহুপদী সমীকরণ বলা হয়।

(i) নং সমীকরণে $x$ এর সর্বোচ্চ ঘাত $n$, সুতরাং বহুপদী সমীকরণটির ঘাত $n$। এখানে $a_0$ কে মুখ্য সহগ বলে।

$x$ এর যে সকল মানের জন্য (i) নং বহুপদী সমীকরণটি সিদ্ধ হয় অর্থাৎ বহুপদীর মান শূন্য হয়, ঐ মানগুলোকে বহুপদী সমীকরণের মূল (root) বলা হয়।

**উদাহরণ-1 :** $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ একটি বহুপদী সমীকরণ। এখানে $x$ এর সর্বোচ্চ ঘাত 3। সুতরাং এই বহুপদী সমীকরণের ঘাত হল 3।

**2:** $4x^4 - 25x^3 + 50x^2 - 35x + 6 = 0$ একটি বহুপদী সমীকরণ। $x$ এর সর্বোচ্চ ঘাত 4 হওয়ায়, এটি একটি চতুর্ঘাত বহুপদী সমীকরণ। $x = 1, 2, 3, \frac{1}{4}$ এর জন্য এই বহুপদীর মান শূন্য হয়। সুতরাং এই বহুপদী সমীকরণের মূলগুলো হল ঃ $1, 2, 3, \frac{1}{4}$

উল্লেখ্য, বহুপদী সমীকরণ $f(x) = 0$ এর একটি মূল $a$ হলে $f(a) = 0$ হবে।

**ভাগশেষ উপপাদ্য ঃ** যদি কোন বহুপদী $f(x)$ কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করা হয়, তাহলে ভাগশেষ হবে $f(a)$.

**প্রমাণ ঃ** এখানে ভাজক $(x-a)$ এর ঘাত 1.

সুতরাং $f(x)$ কে $(x-a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল হয় 0 (শূন্য) হবে অথবা অশূন্য ধ্রুবক হবে।

ধরা যাক্, ভাগশেষ $R$ এবং ভাগফল $Q(x)$

এখন, ভাগের নিয়ম অনুসারে সকল $x$ এর জন্য $f(x) = (x-a)\ Q(x) + R$ ----------- (i)

(i) নং সমীকরণে $x = a$ বসিয়ে পাই,

$f(a) = (a-a)\ Q(x) + R$

বা, $f(a) = 0.Q(x) + R = R$

$\therefore\ f(a) = R$ (ভাগশেষ)

সুতরাং $f(x)$ কে $(x-a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(a)$। (প্রমাণিত)

**উৎপাদক উপপাদ্য ঃ** যদি $a$, বহুপদী সমীকরণ $f(x)$ এর একটি মূল হয়, তবে $x-a$ বহুপদী $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে।

**প্রমাণঃ** যেহেতু, $a$ বহুপদী সমীকরণ $f(x) = 0$ এর একটি মূল, সুতরাং $a$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে অর্থাৎ $f(a) = 0$.

অতএব, ভাগশেষ উপপাদ্য থেকে পাই,

$f(x) = (x-a)\ Q(x) + f(a)$

সুতরাং $f(x) = (x-a)\ Q(x)$ যেহেতু $f(a) = 0$

অতএব, $f(x)$ বহুপদী $(x-a)$ দ্বারা বিভাজ্য।

সুতরাং $(x-a), f(x)$ এর একটি উৎপাদক। (প্রমাণিত)

**উপপাদ্য ঃ $n$ ঘাত বিশিষ্ট বহুপদী সমীকরণের $n$ সংখ্যক মূল আছে।**

**প্রমাণ ঃ** মনে করুন,

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + - - - - - + a_n = 0$$

আবার ধরুন, $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল $\alpha_1$.

সুতরাং $f(x)$ বহুপদটি $x-\alpha_1$ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হবে এবং ভাগফল একটি অখন্ড ফাংশন হবে যার ঘাত হবে $n-1$।

ভাগফলটি যদি $g_1(x)$ হয় তবে-

$$f(x) = (x-\alpha_1)\, g_1(x) \text{ ----------------- } (1)$$

আবার $g_1(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল $\alpha_2$ হলে $(x-\alpha_2)$ দ্বারা $g_1(x)$ নিঃশেষে বিভাজ্য হবে এবং ভাগফল একটি অখন্ড ফাংশন হবে যার ঘাত $n-2$

ভাগফলটি যদি $g_2(x)$ হয় তবে $g_1(x) = (x-\alpha_2)\, g_2(x)$ - - - - - - - (2)

(1) নং (2) নং সমীকরণ থেকে পাই, $f(x) = (x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)\, g_2(x)$

অনুরূপভাবে অগ্রসর হলে $f(x)$ এর $n$ সংখ্যক উৎপাদক পাওয়া যাবে।

অতএব, আমরা পাই, $f(x) = (x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)$ - - - - - - - $(x-\alpha_n)$

এখন $x = \alpha_1, \alpha_2,$ - - - - - -, $\alpha_n$ বসালে $f(x) = 0$ হবে।

সুতরাং $f(x) = 0$ সমীকরণের $n$ সংখ্যক মূল আছে। (প্রমাণিত)

**উদাহরণ-1 :** $f(x) = x^3-8x^2+6x+60$ বহুপদীকে $x+2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?

**সমাধান ঃ** এখানে $x+2 = x-(-2)$

আমরা জানি, $f(x)$ কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(a)$.

$\therefore$ ভাগশেষ $= f(-2)$ যেহেতু এক্ষেত্রে $a = -2$

$= (-2)^3 - 8(-2)^2 + 6\,(-2) + 60$

$= -8-8\infty 4-12+60$

$= -52 + 60 = 8$

**উদাহরণ-2 :** প্রমাণ করুন, $g(x) = 2x^3-5x^2+6x-3$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x-1$.

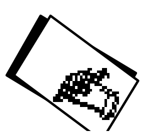
**সমাধান ঃ** আমরা জানি, $x-a, f(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে যদি $f(a) = 0$ হয়।

$\therefore\; g(1) = 2(1)^3 - 5(1)^2 + 6(1) - 3$

$= 2 - 5 + 6 - 3 = 8 - 8$

$= 0$

সুতরাং $(x-1)$, $g(x)$- এর একটি উৎপাদক। (প্রমাণিত)



## অনুশীলনী-৩.২

1. যদি $f(x) = 5x^3 + 6x^2 - ax + 6$ কে $x-2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 6 হয়, তবে $a$ এর মান নির্ণয় করুন।
2. যদি $f(x) = 2x^3-5x^2+7x-6$ হয়, তবে $f(x)$ কে $x-2$ দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকে তা ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় করুন।
3. $x^4-5x^3+7x^2-a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x-2$ হলে, প্রমাণ করুন $a = 4$.
4. নিচের বহুপদী সমীকরণটির ঘাত, মূলের সংখ্যা কারণসহ উল্লেখ করুন ঃ

   $x^4 + 7x^3 - 9x^2 + 23x + 6$

## পাঠ ৩ মূল ও সহগের সম্পর্ক

### উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- মূল ও সহগের মধ্যে সম্পর্ক জানতে পারবেন,
- এদের মধ্যকার সম্পর্ক প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন।

মনে করুন, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha$ এবং $\beta$

এখন $ax^2 + bx + c = 0$

বা, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, যেহেতু উভয় পক্ষকে $a$ দ্বারা ভাগ করা হয়েছে।

এক্ষেত্রে $\alpha, \beta$ মূল হওয়ায় $(x-\alpha)$ এবং $(x-\beta)$, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ এর দুটি উৎপাদক।

অতএব, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x-\alpha)(x-\beta)$

বা, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$ --------------(1)

(1) নং এর উভয় পক্ষ থেকে সহগ সমীকৃত করে পাই,

$-(\alpha+\beta) = \frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

অর্থাৎ $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$\therefore\ \alpha+\beta = (-1)\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = (-1)^2\frac{c}{a}$

আবার মনে করুন, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় $\alpha, \beta, \gamma$

$\therefore\ ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

বা, $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$

স্পষ্টতই, $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$ এবং $(x-\gamma)$; $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}$ এর উৎপাদক হবে।

সুতরাং $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

বা, $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+ (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$ -------(2)

(2) নং এর উভয় পক্ষ থেকে সহগ সমীকৃত করে পাই,

$-(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{c}{a}$, $-\alpha\beta\gamma = \frac{d}{a}$

অর্থাৎ $\alpha+\beta+\gamma = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma = (-1)\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = (-1)^2\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma = (-1)^3\frac{d}{a}$

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে,

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + - - - - + a_n = 0$ সমীকরণের মূলগুলো

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, - - - - - - -, \alpha_n$ হলে

মূলগুলোর যোগফল $= \alpha_1 + \alpha_2 + - - - - - - + \alpha_n$

$= \sum \alpha_1 = (-1)\frac{a_1}{a_0} = -\frac{a_1}{a_0}$

প্রত্যেকবার দুটি করে মূল দিয়ে গুণ করে প্রাপ্ত গুণফলগুলোর যোগফল = $\sum \alpha_1\alpha_2 = (-1)^2 \frac{a_2}{a_o} = \frac{a_2}{a_o}$

একইভাবে, $\sum \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = (-1)^3 \frac{a_3}{a_o} = -\frac{a_3}{a_o}$

সবগুলো মূলের একত্রে গুণফল, $\alpha_1\alpha_2 ------ \alpha_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_o}$

**অনুসিদ্ধান্ত ঃ** উপরোক্ত আলোচনা থেকে লিখা যায়, $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের

মূলদ্বয়ের যোগফল $= -\frac{b}{a} = -\frac{x \text{ এর সহগ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

মূলদ্বয়ের গুণফল $= \frac{c}{a} = \frac{x \text{ বর্জিত পদ বা অনপেক্ষ পদ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

$ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের

মূলদ্বয়ের যোগফল $= -\frac{b}{a} = -\frac{x \text{ এর সহগ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

মূলদ্বয়ের গুণফল $= \frac{c}{a} = \frac{x \text{ বর্জিত পদ বা অনপেক্ষ পদ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

**উদাহরণ-1 :** $5x^2 - 17x + 9 = 0$ সমীকরণের মূল দুটি $\alpha, \beta$ হলে $\alpha+\beta$ এবং $\alpha\beta$ এর মান নির্ণয় করুন।

**সমাধান ঃ** প্রদত্ত সমীকরণ $5x^2 - 17x + 9 = 0$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল $\alpha+\beta = -\frac{x \text{ এর সহগ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

$= -\left(\frac{-17}{5}\right) = \frac{17}{5}$

মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha\beta = \frac{\text{অনপেক্ষ পদ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

$= \frac{9}{5}$

সুতরাং $\alpha+\beta = \frac{17}{5}$ এবং $\alpha\beta = \frac{9}{5}$

**উদাহরণ-2 :** $x^4+5x^3+3x+9 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো $a, b, c, d$ হলে $\sum a$, $\sum abc$ এবং $abcd$ এর মান নির্ণয় করুন।

**সমাধান ঃ** প্রদত্ত সমীকরণ, $x^4 + 5x^3 + 3x + 9 = 0$

অতএব, $x^4 + 5x^3 + 0.x^2 + 3x + 9 = 0$

[ $x$ এর শক্তির কোন পদ না থাকলে তার সহগ 0 (শূন্য) ধরতে হয়। ]

সুতরাং $\sum a = (-1)\frac{5}{1} = -5,$

$\sum abc = (-1)^3 \frac{0}{1} = 0$

$abcd = (-1)^4 \frac{9}{1} = 9$

$\therefore \sum a = -5, \quad \sum abc = 0, \quad abcd = 9$

**উদাহরণ-3 :** কোন বহুপদী সমীকরণের মূলগুলো $\frac{1}{2}$, 2, –3 হলে সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

**সমাধান ঃ** সেহেতু বহুপদী সমীকরণের মূলত্রয় $\frac{1}{2}$, 2, –3 সুতরাং সমীকরণটি হবে,

$\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) \ \{x - (-3)\} = 0$

বা, $\left(\frac{2x-1}{2}\right)(x-2)\,(x+3) = 0$

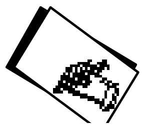
বা, $(2x-1)\,(x-2)\,(x+3) = 0$

বা, $(2x-1)\,(x^2+3x-2x-6) = 0$

বা, $(2x-1)\,(x^2+x-6) = 0$

বা, $2x^3+2x^2-12x-x^2-x+6 = 0$

বা, $2x^3+x^2-13x+6 = 0$



## অনুশীলনী-৩.৩

1. $px^2+qx+r = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha, \beta$ হলে $\alpha+\beta$ এবং $\alpha\beta$ এর মান নির্ণয় করুন।
2. $x^3+px^2+qx+r = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় $\alpha, \beta, \gamma$ হলে $\sum\alpha, \sum\alpha\beta$ এবং $\alpha\beta\gamma$ এর মান কত?
3. $x^2-6x+p = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $a, b$ হলে $a+b$ এবং $ab$ এর মান কত?
4. একটি সমীকরণের তিনটি মূল $4, -\frac{3}{2}$ , $-2$ হলে সমীকরণটি নির্ণয় করুন।
5. $3x^2 + bx - 12 = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয়ের অন্তর 4 হলে, $b$ এর মান নির্ণয় করুন।

## পাঠ ৪ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রকৃতি

**উদ্দেশ্য**

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।
- সমীকরণ সমাধান না করেই সমীকরণের মূলগুলো সম্বন্ধে ধারণা নিতে পারবেন।

**দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রকৃতি ঃ**

$ax^2 + bx + c = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যেখানে $a \neq 0$ এবং $a, b, c$ প্রত্যেকে বাস্তব সংখ্যা।

$ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটি সমাধান করে পাওয়া যায়,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

অর্থাৎ সমীকরণটির মূল দুটি $\alpha, \beta$ হলে

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ ,\ \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

এখানে $b^2 - 4ac$ রাশিটি দুটি সমাধানেই বর্গমূল চিহ্নের ভিতরে অবস্থিত। $(b^2 - 4ac)$ এর মান পর্যালোচনা করলেই দ্বিঘাত সমীকরণের মূল দুটির প্রকৃতি জানতে পারা যায়। এজন্য $(b^2 - 4ac)$ কে প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণটির নিশ্চায়ক বা নিরুপক (discriminant) বলা হয়।

যদি $a, b, c$ বাস্তব রাশি হয়, তাহলে দ্বিঘাত সমীকরণটি সমাধান না করেও $(b^2 - 4ac)$ নিশ্চায়কটি দ্বারা সমীকরণটি মূলের প্রকতি জানা যায়। নিম্নে এ বিষয়ে আলোচনা করা হল ঃ

১। যদি $b^2 - 4ac = 0$ হয় অর্থাৎ $b^2 = 4ac$ হয়, তবে মূল দুটি $-\frac{b}{2a}$ এবং $-\frac{b}{2a}$। এখানে মূল দুটি বাস্তব এবং সমান।

সুতরাং $\alpha = \beta = -\frac{b}{2a}$

২। যদি $b^2 - 4ac$ ধনাত্মক, অর্থাৎ $b^2 - 4ac > 0$ বা, $b^2 > 4ac$ হয়, তবে $\sqrt{b^2 - 4ac}$ বাস্তব সংখ্যা হবে। সুতরাং, এক্ষেত্রে মূল দুটি বাস্তব ও অসমান হবে।

৩। যদি $b^2 - 4ac$ ঋণাত্মক হয়, অর্থাৎ $b^2 - 4ac < 0$ বা, $b^2 < 4ac$ হয়, তবে মূল দুটি জটিল সংখ্যা হবে। এক্ষেত্রে এরা যুগলরূপে আসবে। মূল দুটি অসমান হবে।

৪। যদি $b^2 - 4ac$ একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হয়, তবে সমীকরণের মূল দুটি মূলদ এবং অসমান হবে।

উপরের আলোচনা নিচে সংক্ষেপে দেয়া হল ঃ

**$ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণে $a, b, c$ বাস্তব ও মূলদ হলে এর মূল দুটি**

**১। বাস্তব ও সমান হবে, যদি $b^2 - 4ac = 0$ হয়।**

**২। বাস্তব ও অসমান হবে, যদি $b^2 - 4ac > 0$ হয়। অধিকন্তু $b^2 - 4ac$ একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হলে মূল দুটি মূলদ ও অসমান হবে।**

**৩। জটিল ও অসমান হবে, যদি $b^2 - 4ac < 0$ হয়।**

**উদাহরণ-1 :** $2x^2 + 6x + 5 = 0$ সমীকরণটির নিশ্চায়ক বের করুন এবং মূলের প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

**সমাধান ঃ** দেয়া আছে,

$$2x^2 + 6x + 5 = 0$$

অতএব, নিশ্চায়ক $= (6)^2 - 4.2.5$

$= 36 - 40$
$= -4$
সুতরাং নিশ্চায়ক $= -4$

যেহেতু নিশ্চায়ক একটি বিয়োগবোধক সংখ্যা, অতএব প্রদত্ত সমীকরণের মূল দুটি জটিল (অবাস্তব) এবং অসমান হবে।

**উদাহরণ-2 :** প্রমাণ করুন যে, $(a+b)x^2 - (a+b+c)\, x + \frac{c}{2} = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সর্বদাই বাস্তব হবে।

**সমাধান ঃ** প্রদত্ত সমীকরণটি, $(a+b)x^2 - (a+b+c)x + \frac{c}{2} = 0$

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের নিশ্চায়ক $= \{-(a+b+c)\}^2 - 4(a+b).\frac{c}{2}\ \}$

$= (a+b+c)^2 - 2c(a+b)$
$= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca-2ac-2bc$
$= a^2+b^2+c^2+2ab$
$= (a+b)^2 + c^2$

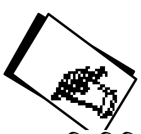
$a, b, c$ এর বাস্তব মানের জন্য $(a+b)^2+c^2$ এর মান সর্বদাই ধনাত্মক বা শূন্য।
সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় সর্বদাই বাস্তব। (প্রমাণিত)

**উদাহরণ-3 :** $a$ এর মান কত হলে $x^2 - 6x - 1 + a(2x+1) = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় সমান হবে?
**সমাধান ঃ** প্রদত্ত সমীকরণটি,

$x^2-6x-1+a\,(2x+1) = 0$
বা, $x^2 - 6x-1+2ax+a = 0$
বা, $x^2+(2a-6)x + a-1 = 0$

প্রদত্ত সমীকরণের মূল দুটি সমান হলে নিশ্চায়কের মান শূন্য হবে।

$\therefore$ নিশ্চায়ক $= (2a-6)^2 - 4.1.(a-1) = 0$
বা, $4a^2 - 24a + 36 - 4a + 4 = 0$
বা, $4a^2 - 28a + 40 = 0$
বা, $a^2 - 7a + 10 = 0$
বা, $(a-5)\,(a-2) = 0$
সুতরাং $a = 5$ অথবা 2



## অনুশীলনী-৩.৪

1. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলোর মূলের প্রকৃতি নির্ণয় করুন ঃ
   (i) $3x^2 + 2x - 7 = 0$, (ii) $2x^2 - 3x - 2 = 0$
   (iii) $25x^2 + 20x + 4 = 0$
2. $a$ এর মান কত হলে $(4-a)x^2 + (2a+4)x + (8a+1) = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় সমান হবে?
3. প্রমাণ করুন যে, $(a+3)x^2 + (6-2a)x + (a-1) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব হলে $a$ এর মান $\frac{3}{2}$ এর চেয়ে বৃহত্তর হবে না।
4. $a$ এর মান ধনাত্মক এবং 3 অপেক্ষা বৃহত্তর না হলে দেখান যে, $(a-2)x^2 -(8-2a)x -(8-3a) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব হবে।
5. $k$ এর মান কত হলে $x^2-2(5+2k)x + 3(7+10k) = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় সমান হবে?

## পাঠ ৫ দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন

### উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- কোন দ্বিঘাত সমীকরণের মূল দেয়া থাকলে সমীকরণ গঠনের দক্ষতা অর্জন করবেন।

### দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন

মনে করুন, কোন দ্বিঘাত সমীকরণের প্রদত্ত দুটি মূল $\alpha, \beta$। আবার মনে করুন, নির্ণেয় সমীকরণটি $ax^2+bx+c=0$

তাহলে $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

এখন, $ax^2 + bx + c = 0$

বা, $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$

বা, $x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a} = 0$

বা, $x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$

বা, $x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$

অর্থাৎ $x^2-$ (মূলদ্বয়ের যোগফল) $x$ + মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

উপরোক্ত সূত্রটি ব্যবহার করে আমরা প্রদত্ত যে কোন দুটি মূল দ্বারা দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করতে পারি।

**উদাহরণ-1 :** এমন একটি সমীকরণ গঠন করুন যার মূলদ্বয় 3 এবং 5.

**সমাধান ঃ** নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয় 3 এবং 5.

সুতরাং মূলদ্বয়ের যোগফল $= 3 + 5 = 8$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $= 3.5 = 15$

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণটি হবে,

$x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল)$x$ + মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

বা, $x^2 - 8x + 15 = 0$

**উদাহরণ-2 :** $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল দুটি $\alpha,\beta$ হলে $\frac{1}{\alpha^2}$ এবং $\frac{1}{\beta^2}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

**সমাধান ঃ** দেয়া আছে, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha, \beta$

সুতরাং $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

এখন এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে যার মূলদ্বয় $\frac{1}{\alpha^2}$ এবং $\frac{1}{\beta^2}$

$$\text{সুতরাং } \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2\beta^2}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

$$= \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2.\frac{c}{a}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}{\frac{c^2}{a^2}}$$

$$= \frac{\frac{b^2 - 2ac}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}}$$

$$= \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \infty \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$$

আবার, $\frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\beta^2}$

$$= \frac{1}{\alpha^2\beta^2} = \frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{1}{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{a^2}{c^2}$$

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল) $x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

বা, $x^2 - \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) x + \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\beta^2} = 0$

বা, $x^2 - \left(\frac{b^2 - 2ac}{c^2}\right) x + \frac{a^2}{c^2} = 0$

বা, $c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$

**উদাহরণ-3 :** বাস্তব সহগবিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করুন যার একটি মূল $-1 + i\sqrt{5}$ .

**সমাধান ঃ** দেয়া আছে, দ্বিঘাত সমীকরণটির একটি মূল $-1+i\sqrt{5}$ , যা একটি জটিল সংখ্যা।

যেহেতু জটিল মূল জোড়ায় জোড়ায় আসে, সুতরাং অপর মূলটি হবে $-1-i\sqrt{5}$

এখন মূলদ্বয়ের যোগফল $= -1 + i\sqrt{5} - 1 - i\sqrt{5} = -2$

মূলদ্বয়ের গুণফল $= (-1+i\sqrt{5})(-1-i\sqrt{5})$

$= (-1)^2 - (i\sqrt{5})^2$

$= 1 - i^2 5 = 1+5$, যেহেতু $i^2 = -1$

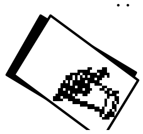
$= 6$

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল)$x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

অর্থাৎ $x^2 - (-2)x + 6 = 0$

$\therefore\ x^2 + 2x + 6 = 0$



## অনুশীলনী-৩.৫

1. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল দুটি $\alpha, \beta$ হলে $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2$ এর মান নির্ণয় করুন।
2. $7x^2 - 5x - 3 = 0$ সমীকরণের মূল দুটি $\alpha, \beta$ হলে $\frac{1}{\alpha} + \frac{3}{\beta}$ এবং $\frac{3}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় করুন।
3. $x^2 + x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদুটি $\alpha, \beta$ হলে এরূপ একটি সমীকরণ গঠন করুন যার মূল দুটি $\alpha^2$ এবং $\beta^2$.
4. $4x^2 - 6x + 1 = 0$ সমীকরণের মূল দুটি $\alpha, \beta$ হলে $\alpha + \frac{1}{\beta}$ এবং $\beta + \frac{1}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় করুন।
5. $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূল দুটি $\alpha, \beta$ হলে $(\alpha - \beta)^2$ এবং $(\alpha + \beta)^2$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় করুন।
6. $2x^2 - 8x + 7 = 0$ সমীকরণের মূল দুটি $\alpha, \beta$ হলে $\alpha^2 + \beta$ এবং $\beta^2 + \alpha$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় করুন।
7. $bx^2 + cx + c = 0$ সমীকরণের মুল দুটি $\alpha, \beta$ হলে প্রমাণ করুন $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{c}{b}} = 0$

# পাঠ ৬ সাধারণ মূলের শর্ত

**উদ্দেশ্য**

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দুটি দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ মূল থাকার শর্ত নির্ণয় করতে পারবেন।
- সাধারণ মূলের শর্ত প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন।

## দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ মূলের শর্ত

**(ক) যে শর্ত সাপেক্ষে $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণ দুটির একটি মূল সাধারণ হবে তা নির্ণয় ঃ**

মনে করুন, সাধারণ মূলটি $\alpha$.

এই সাধারণ মূলটি উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।

সুতরাং $a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1 = 0$

$a_2\alpha^2 + b_2\alpha + c_2 = 0$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে পাওয়া যায়,

$$\frac{\alpha^2}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{\alpha}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\therefore \alpha = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{c_1a_2 - c_2a_1} \quad \text{এবং } \alpha = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ - - - - - - - - - - (1)}$$

বা, $\dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

বা, $(a_1b_2 - a_2b_1)\,(b_1c_2 - b_2c_1) = (c_1a_2 - c_2a_1)^2$, ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

(1) নং সমীকরণ থেকে মূল $\alpha$ এর মান হল-

$$\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{c_1a_2 - c_2a_1} \quad \text{বা, } \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

উল্লেখ্য, যদি $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণ দুটির একটি সাধারণ মূল $\alpha$ হয়, তবে $a_1x^2 + b_1x + c_1$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2$ রাশি দুটির একটি সাধারণ উৎপাদক $(x-\alpha)$ হবে।

সুতরাং যে শর্ত সাপেক্ষে $a_1x^2+b_1x+c_1 = 0$ এবং $a_2x^2+b_2x+c_2 = 0$ সমীকরণ দুটির একটি সাধারণ মূল থাকে, সে শর্তেই $a_1x^2+b_1x+c_1$ এবং $a_2x^2+b_2x+c_2$ রাশি দুটির একটি সাধারণ একঘাত উৎপাদক থাকবে।

**(খ) যে শর্ত সাপেক্ষে $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণ দুটির দুটি মূলই সাধারণ হবে তা নির্ণয় করতে হবে।**

মনে করুন, $\alpha$ এবং $\beta$ সমীকরণ দুটির সাধারণ মূল।

সুতরাং $\alpha + \beta = -\dfrac{b_1}{a_1} = -\dfrac{b_2}{a_2}$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \text{ - - - - - - - - - - - (1)}$$

আবার $\alpha\beta = \dfrac{c_1}{a_1} = \dfrac{c_2}{a_2}$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2} \text{ - - - - - - - - - - - (2)}$$

(1) এবং (2) নং থেকে পাই;

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ , ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

**উদাহরণ-1 :** যদি $ax^2+bx+c=0$ এবং $cx^2+bx+a=0$ সমীকরণ দুটির একটি সাধারণ মূল থাকে, তবে প্রমাণ করুনঃ

$a+b+c = 0$ অথবা $a-b+c = 0$

**সমাধান ঃ** মনে করুন, সাধারণ মূল $\alpha$

সুতরাং $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

$c\alpha^2 + b\alpha + a = 0$

বজ্রগুণন প্রক্রিয়ার মাধ্যমে পাওয়া যায়,

$$\frac{\alpha^2}{ab-bc} = \frac{\alpha}{c^2-a^2} = \frac{1}{ab-bc}$$

$\therefore \quad \alpha = \frac{ab-bc}{c^2-a^2}$ এবং $\alpha = \frac{c^2-a^2}{ab-bc}$

অতএব, $\frac{ab-bc}{c^2-a^2} = \frac{c^2-a^2}{ab-bc}$

বা, $(c^2-a^2)^2 = (ab-bc)\,(ab-bc) = b^2\,(a-c)^2$

বা, $\{(c+a)(c-a)\}^2 = b^2(a-c)^2$

বা, $(c+a)^2\,(c-a)^2 = b^2(c-a)^2$

বা, $(c+a)^2\,(c-a)^2 - b^2\,(c-a)^2 = 0$

বা, $(c-a)^2\,\{(c+a)^2 - b^2\} = 0$

বা, $(c-a)^2\,(c+a+b)\,(c+a-b) = 0$

$\therefore \quad c-a = 0$ বা $c = a$

$c+a+b = 0$

অথবা $c+a-b = 0$

কিন্তু $c = a$ হতে পারে না, কারণ এক্ষেত্রে সমীকরণ দুটি একই হয়ে যায় এবং তাদের দুটি মূলই সাধারণ মূল হয়ে যায়।

অতএব, $a+b+c = 0$ অথবা $a-b+c = 0$

**উদাহরণ-2 :** যদি $x^2-ax+b = 0$ এবং $x^2-bx+a = 0$ সমীকরণ দুটির কেবল একটি মূল সাধারণ থাকে তাহলে প্রমাণ করুন, $a+b = -1$

**সমাধান ঃ** মনে করন, সাধারণ মূলটি $\alpha$.

সুতরাং $\alpha^2 - a\alpha + b = 0$

$\alpha^2 - b\alpha + a = 0$

বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায়,

$$\frac{\alpha^2}{-a^2+b^2} = \frac{\alpha}{b-a} = \frac{1}{-b+a}$$

$\therefore \quad \alpha = \frac{b^2-a^2}{b-a}$ , $\alpha = \frac{b-a}{a-b}$

$\therefore$ আমরা পাই,

$$\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{b-a}{a-b}$$

বা, $(b^2-a^2)\,(a-b) = (b-a)^2$

বা, $(b-a)^2 + (b-a)\,(b^2-a^2) = 0$

বা, $(b-a)^2 + (b-a)\,(b-a)\,(b+a) = 0$

বা, $(b-a)^2 + (b-a)^2\,(b+a) = 0$

বা, $(b-a)^2\,[1+b+a] = 0$

কিন্তু $b-a \neq 0$, কারণ তাহলে সমীকরণ দুটি একই হয়। সুতরাং $1+b+a = 0$

অর্থাৎ $a+b = -1$

**উদাহরণ-3 :** যদি $px^2+2x+1=0$ এবং $x^2+2x+p=0$ সমীকরণ দুটির একটি সাধারণ মূল থাকে, তাহলে $p$ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় করুন।

**সমাধান ঃ** মনে করুন, সাধারণ মূলটি $\alpha$.

তাহলে, $p\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$

$\alpha^2 + 2\alpha + p = 0$

বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায়,

$$\frac{\alpha^2}{2p-2} = \frac{\alpha}{1-p^2} = \frac{1}{2p-2}$$

বা, $\dfrac{\alpha^2}{2(p-1)} = \dfrac{\alpha}{(1+p)(1-p)} = \dfrac{1}{2(p-1)}$

বা, $\dfrac{\alpha^2}{2} = \dfrac{\alpha}{-(p+1)} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha = -\dfrac{2}{1+p}$ বা, $\alpha = -\dfrac{1+p}{2}$

সুতরাং $-\dfrac{2}{1+p} = -\dfrac{1+p}{2}$

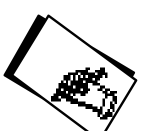
বা, $(1+p)^2 = 4$

বা, $1+2p+p^2 = 4$

বা, $p^2 + 2p-3 = 0$

বা, $(p+3)(p-1) = 0$

অতএব, $p = 1$, বা, $-3$



## অনুশীলনী-৩.৬

1. $x^2+kx-6k = 0$ এবং $x^2-2x-k=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে k এর মান নির্ণয় করুন।
2. $px^2+qx+1=0$ এবং $qx^2+px+1=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে প্রমাণ করুন $p+q+1 = 0$
3. যদি $x^2+bx+ca = 0$ এবং $x^2+cx+ab=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকে, তবে প্রমাণ করুন $a+b+c = 0$
4. যে শর্ত সাপেক্ষে $ax^2-bx+c=0$ এবং $bx^2-cx+a = 0$ সমীকরণ দুটির একটি সাধারণ মূল হতে পারে তা নির্ণয় করুন।
5. $x^2+ax+b = 0$ এবং $x^2+bx+a = 0$ $(a\neq b)$ সমীকরণ দুটির একটি সাধারণ মূল থাকলে, প্রমাণ করুন $2x^2 + (a+b)x = (a+b)^2$ সমীকরণের সমাধান $x = 1$ এবং $x = -\dfrac{1}{2}$ হবে।

## পাঠ ৭ প্রতিসম রাশির মান

### উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দ্বিঘাত ও ত্রিঘাত সমীকরণের মূলের প্রতিসম রাশির মান নির্ণয় করতে পারবেন।
- প্রতিসম রাশির মান প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

### মূলের প্রতিসম (Symmetric) রাশির মান

দুই বা ততোধিক চলকের কোন ফাংশনে দুটি চলকের অবস্থান বিনিময় করলে যদি ফাংশনের কোন পরিবর্তন না হয়, তবে তাকে প্রতিসম ফাংশন বলা হয়।

$\alpha, \beta$ কোন দ্বিঘাত সমীকরণের মূল হলে $\alpha$ ও $\beta$ সম্বলিত কোন রাশিমালায় $\alpha$ এর পরিবর্তে $\beta$ এবং $\beta$ এর পরিবর্তে $\alpha$ লিখলে যদি রাশিমালাটির কোন পরিবর্তন না হয় তবে রাশিমালাটিকে মূলের প্রতিসম ফাংশন বলে। প্রতিসম ফাংশনের মান নির্ণয়ের জন্য ফাংশনটি, মূল দুটির যোগফল এবং গুণফলের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়।

মনে করন, একটি ত্রিঘাত সমীকরণের মূলগুলো $\alpha, \beta, \gamma$ তাহলে $\alpha+\beta+\gamma$ রাশিতে $\alpha$ ও $\beta$ এর অবস্থান বিনিময় করলে আমরা পাই, $\beta+\alpha+\gamma$

আবার $\beta$ ও $\gamma$ এর অবস্থান পরিবর্তন করলে আমরা পাই, $\gamma+\alpha+\beta$

কিন্তু $\alpha+\beta+\gamma$, $\beta+\alpha+\gamma$ এবং $\gamma+\alpha+\beta$ এর প্রত্যেকের মান একই। অর্থাৎ দুটি করে নিয়ে মূলের অবস্থান বিনিময় করলে $\alpha+\beta+\gamma$ এর মানের পরিবর্তন হয় না। এ ধরনের রাশিকে বলা হয় প্রতিসম রাশি।

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\gamma+\beta^2\alpha+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta$ ইত্যাদি প্রত্যেক $\alpha, \beta, \gamma$ দ্বারা গঠিত প্রতিসম ফাংশন। প্রচলিত রীতি অনুসারে যোগফল বুঝাতে $\sum$ প্রতীক ব্যবহার করা হয়। $\sum\alpha^3$ দ্বারা $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ বুঝায় এবং $\sum\alpha^2\beta^2$ দ্বারা $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$ বুঝায়।

**দুই বা ততোধিক চলকের কোন ফাংশনে দুটি চলকের অবস্থান বিনিময় করলে যদি ফাংশনের কোন পরিবর্তন না হয়, তবে তাকে প্রতিসম ফাংশন বলা হয়।**

**উদাহরণ-1 :** $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha, \beta$ হলে $(1+\alpha+\alpha^2)(1+\beta+\beta^2)$ এর মান নির্ণয় করুন।

**সমাধান ঃ** $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha, \beta$

সুতরাং $\alpha+\beta=\sum\alpha=-\frac{b}{a}$ , $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

এখন, $(1+\alpha+\alpha^2)(1+\beta+\beta^2)$

$$= 1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta+\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\beta+\beta^2\alpha+\alpha^2\beta^2$$

$$= 1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha\beta)^2$$

$$= 1-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2.\frac{c}{a}+\frac{c}{a}.\left(-\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$= 1-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}-\frac{bc}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}(a^2-ab+ac+b^2-2ac-bc+c^2)$$

$$= \frac{1}{a^2}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

**উদাহরণ-2 :** $x^3+ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূল $\alpha, \beta, \gamma$ হলে $\sum\alpha^3\beta$ এর মান নির্ণয় করুন।

**সমাধান ঃ** $x^3+ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলত্রয় $\alpha, \beta, \gamma$। সুতরাং আমরা পাই,

$$\sum\alpha=\alpha+\beta+\gamma=-a$$

$$\sum\alpha\beta=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$$

$$\alpha\beta\gamma=-c$$

এখন $\sum\alpha^3\beta = \alpha^3\beta+\alpha^3\gamma+\beta^3\alpha+\beta^3\gamma+\gamma^3\alpha+\gamma^3\beta$

$= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) - (\alpha^2\beta\gamma+\beta^2\alpha\gamma+\gamma^2\alpha\beta)$

$= [(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)](\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

$= [(\sum\alpha)^2 - 2\sum\alpha\beta](\sum\alpha\beta) - \alpha\beta\gamma(\sum\alpha)$

$= [(-a)^2 - 2b](b) - (-c)(-a)$

$= (a^2-2b)b - ac$

$= a^2b - 2b^2 - ac$

অতএব, $\sum\alpha^3\beta = a^2b - 2b^2 - ac$

## অনুশীলনী-৩.৭

1. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল তিনটি $\alpha, \beta, \gamma$ হলে $\sum\alpha^2\beta$ এবং $\sum\alpha^3$ এর মান নির্ণয় করুন।
2. $ax^2+bx+c = 0$ সমীকরণের মূল দুটি $\alpha, \beta$ হলে নিচের প্রতিসম রাশিগুলোর মান নির্ণয় করুন ঃ
   $\sum\alpha^2, \sum\alpha^3, \sum\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)$
3. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় $\alpha, \beta, \gamma$ হলে $\sum(\alpha-\beta)^2$ এবং $\sum\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)$ এর মান নির্ণয় করুন।
4. $x^3 + px^2 + qx + \mathrm{r} = 0$ সমীকরণের মূলগুলো $a, b, c$ হলে $\sum a^2$ এর মান নির্ণয় করুন।

## উত্তরমালা

**অনুশীলনী-৩.১**

1. (i) বহুপদী, (ii) বহুপদী নয়, (iii) বহুপদী
   (iv) বহুপদী নয় (v) বহুপদী, (vi) বহুপদী নয়।
2. (i) 5, 3, 0 (ii) 6, 4 (iii) 1, 1, 2
3. (i) 5, (ii) 4, (iii) 15

**অনুশীলনী-৩.২**

1. $a$=32, 2. P(2) =2, 4. ঘাত = 4, মূল 4 টি।

**অনুশীলনী-৩.৩**

1. $-\frac{q}{p}, \frac{r}{p}$ 2. $-p, q, -r$ 3. 6, $p$ 4. $2x^3-x^2-22x-24 = 0$ 5. $b = 0$

**অনুশীলনী-৩.৪**

1. (i) বাস্তব ও অসমান, (ii) বাস্তব ও অসমান
   (iii) বাস্তব ও সমান
2. 0 বা 3 5. 2 বা, $\frac{1}{2}$

**অনুশীলনী-৩.৫**

1. $\dfrac{4b^2(a^2+c^2) -2ac(a-c)^2}{a^2c^2}$
2. $3x^2 + 20x -3 = 0$
3. $x^2+x+1 = 0$
4. $4x^2-30x+25 = 0$
5. $x^2 - 2(p^2-2q)x + p^4 - 4p^2q = 0$
6. $4x^2 - 52x + 151 = 0$

**অনুশীলনী-৩.৬**

1. 0, 3, 8
2. $a\,(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = 0$

**অনুশীলনী-৩.৭**

1. $-ab+3c,\ -a^3+3ab-3c$
2. $\dfrac{b^2-2ac}{a^2}\ ,\dfrac{3abc-b^3}{a^3}\ ,\dfrac{b^4+2a^2c^2-4ab^2c}{a^4}\ ,\dfrac{b^2-2ac}{c^2}$
3. $2a^2-6b, \dfrac{1}{c}\ (ab-3c)$
4. $p^2-2q.$

MD. SAIFUL ABEDIN
Junior Instructor (Mathematics)
Math-3 (25931)

# কনিক

# (Conics)

### ভূমিকা

*গ্রীক গণিতবিদগণ খ্রিষ্টপূর্ব ২০০ সালের দিকে কনিক সম্পর্কে সম্যক ধারনা দেন। তবে এদের মধ্যেAppolonius সর্বপ্রথম নিয়মানুগভাবে কনিককে ব্যাখ্যা করেন। কোনোকোণককে একটি সমতল দিয়ে ছেদ করে বিভিন্ন আকৃতির বক্ররেখা পাওয়া যায়। এসব বক্ররেখাগুলোকে সাধারণভাবে কনিক বলা হয়। গণিতের বিভিন্ন শাখায় যেমন- জ্যামিতিতে এবং বিশেষ করে জ্যোর্তিবিজ্ঞানে তারকারাজি ও গ্রহাণুপুঞ্জের গতিপথ নির্ণয় করতে কনিক সম্পর্কে ধারণা থাকা আবশ্যক।*

### ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত ও অধিবৃত্ত চিহ্নিত এবং চিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন করতে পারবেন,
- পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত ও অধিবৃত্ত সম্পর্কিত বিভিন্ন সংজ্ঞা বলতে পারবেন,
- পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত ও অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণসমূহ নির্ণয় করতে পারবেন,
- পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত ও অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, অক্ষরেখা, নিয়ামকরেখা ও উৎকেন্দ্রিকতা ইত্যাদি নির্ণয় সহ বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন,
- উপবৃত্ত ও অধিবৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন,
- বিভিন্ন প্রকার পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত ও অধিবৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবেন।

| | |
|---|---|
| **ইউনিট সমাপ্তির সময়** | **ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ৩৫ দিন** |

### এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ৫.১:কনিক সম্পর্কে ধারণা
পাঠ ৫.২:বিভিন্ন ধরনের কনিক (বৃত্ত, পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত)
পাঠ ৫.৩:পরাবৃত্ত
পাঠ ৫.৪:পরাবৃত্ত(বিভিন্ন সমীকরণ)
পাঠ ৫.৫:পরাবৃত্তের লেখচিত্র
পাঠ ৫.৬: উপবৃত্ত
পাঠ ৫.৭:উপবৃত্ত (বিভিন্ন সমীকরণ)
পাঠ ৫.৮:উপবৃত্তের লেখচিত্র
পাঠ ৫.৯:উপবৃত্তের উপরস্থ কোনো বিন্দুর পরামিতিক স্থানাঙ্ক
পাঠ ৫.১০: অধিবৃত্ত
পাঠ ৫.১১:অধিবৃত্ত (বিভিন্ন সমীকরণ)
পাঠ ৫.১২:অধিবৃত্তের লেখচিত্র
পাঠ ৫.১৩:অধিবৃত্তের অসীমতট ও পরামিতিক স্থানাঙ্ক
পাঠ ৫.১৪:ব্যবহারিক

# কনিক সম্পর্কে ধারণা

## পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

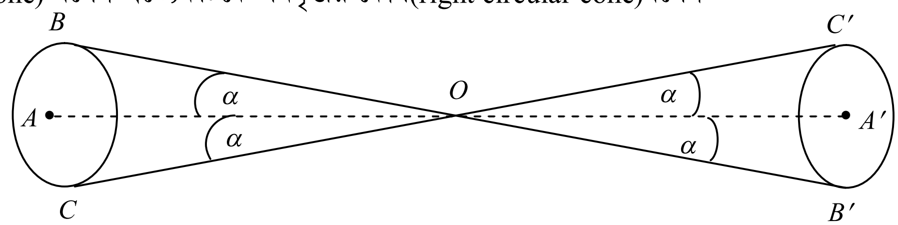
- কনিক সম্পর্কে বর্ণনা করতে পারবেন,
- চিত্রের মাধ্যমে বিভিন্ন কণিকের বর্ণনা দিতে পারবেন।

| মুখ্য শব্দ | কনিক, দ্বি-কোণ, সমবৃত্তীয় কোণ, শীর্ষবিন্দু, নিয়ামকরেখা, অর্ধশীর্ষ কোণ |
|---|---|

## মূলপাঠ

**কনিক সম্পর্কে ধারণা**

কনিক শব্দটির উৎপত্তি কোণক থেকে। কোণককে বিভিন্ন অবস্থায় একটি সমতল দিয়ে ছেদ করলে বিভিন্ন আকৃতির বক্ররেখা,যেমন-বৃত্ত, পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত ইত্যাদিপাওয়া যায়। এসব বক্ররেখাগুলো কনিক হিসেবে পরিচিত। ধরুন, $O$ বিন্দুগামী $AA'$ একটি সরলরেখা এবং $O$ বিন্দু দিয়ে বিন্দুগুচ্ছের(the set of points) দ্বারা $BB'$ ও $CC'$ দুটি রেখা উৎপন্ন হয়। ধরুন, যেকোনো একটি রেখা $AA'$ এর সাথে $\alpha$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখাগুলোর সাহায্যেসৃষ্ট কোণকে দ্বি-কোণ(double cone) বলে। প্রত্যেকটিকে সমবৃত্তীয় কোণ(right circular cone)বলে।

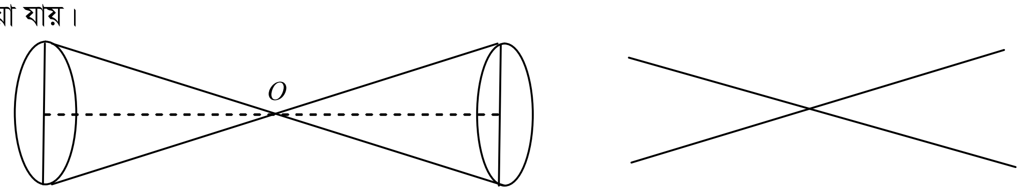



$O$ কে শীর্ষবিন্দু(vertex), $AA'$ কে অক্ষ(axis), $BB'$ ও $CC'$ কে নিয়ামকরেখা বাকারিকারেখা(generating line), $\alpha$ কে অর্ধশীর্ষ কোণ(semi-vertical angle)বলে।

**কনিকের আকৃতি**

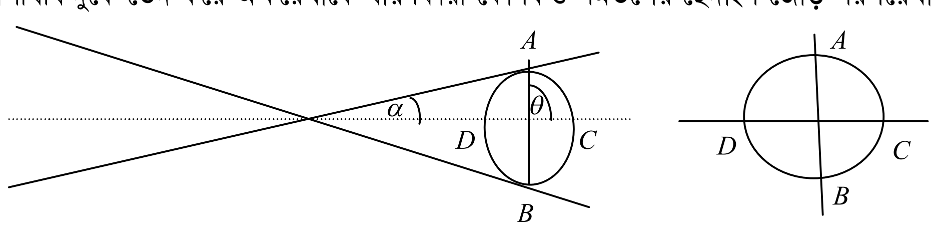
কনিক সাধারণত তিন ধরনের,যেমন- পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত। আর বৃত্ত হলো উপবৃত্তের বিশেষ ক্ষেত্র। আবার এক জোড়া সরলরেখাকেও কখনো কখনো কনিকহিসেবে বিবেচনা করা হয়।নিম্নের চিত্রগুলো হতে বিভিন্ন কনিকের আকৃতির পরিচয় পাওয়া যায়।

(i)



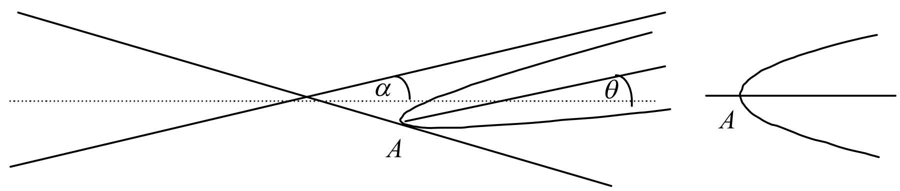

কোণকেরশীর্ষবিন্দুকে ভেদ করে অক্ষরেখাকে ধারণকারী কোণকও সমতলের ছেদাংশ জোড় সরলরেখা সূচিত করে।

(ii)



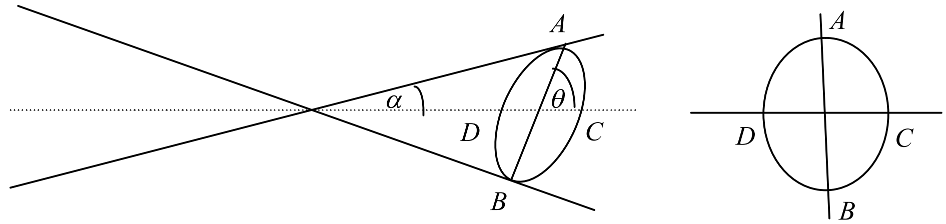
কোণকেরঅক্ষরেখাকে লম্বভাবে সমতল দ্বারা ছেদাংশ বৃত্ত সূচিত করে, বৃত্তের ক্ষেত্রে $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(iii)



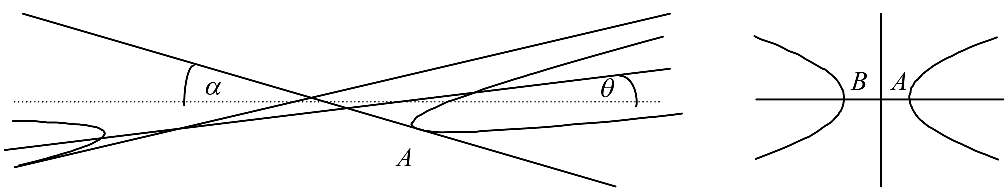

কারিকারেখার সাথে সমান্তরাল করে কোণক ও সমতলের ছেদাংশ পরাবৃত্ত সূচিত করে, এক্ষেত্রে $\theta = \alpha$.

(iv)



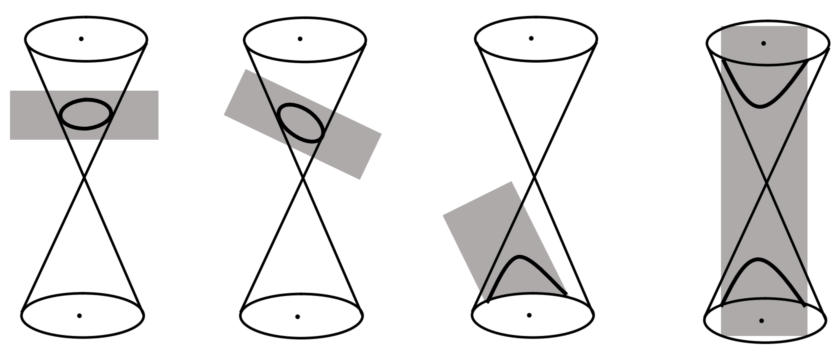

কোণকেরঅক্ষরেখার সাথে কোনো নির্দিষ্ট $\theta$ কোণে সমতল দ্বারা ছেদাংশ উপবৃত্ত সূচিত করে, এক্ষেত্রে $\alpha < \theta < \frac{\pi}{2}$.

(v)




কোণকেরশীর্ষগমনীয় এরূপ একটি সমতল দিয়ে উভয় কোণকেরযে ছেদাংশ পাওয়া যায়, সে বক্ররেখাদ্বয় একত্রে অধিবৃত্ত নামে পরিচিত, এক্ষেত্রে $\theta < \alpha$.

অর্থাৎ সমতলটি কোনকের শীর্ষবিন্দু দিয়ে গেলে এক জোড়া সরলরেখা পাওয়া যাবে। আবার সমতলটি যদি কোনকের শীর্ষবিন্দু দিয়ে না যায় এবং কোনকের ভূমির সমান্তরাল অথবা এর অক্ষের সাথে লম্বভাবে কোনকটিকে ছেদ করে, তবে ছেদরেখাটি বৃত্ত হবে। এভাবে সমবৃত্তভূমিক কোনকটি, সমতলটির দ্বারা বিভিন্ন অবস্থায় খন্ডিত হয়ে বৃত্ত, পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত সৃষ্টি করে বলেই এই বক্ররেখাগুলোর সাধারণ নাম কনিক।



বৃত্ত উপবৃত্ত পরাবৃত্ত অধিবৃত্ত

উপরের চিত্রগুলো হতে আমরা দেখি, একটি সমতলকোনকের সাথে বিভিন্নভাবে ছেদ করেমোটা দাগাঙ্কিত কনিকসমূহ উৎপন্ন করেছে।

## সারসংক্ষেপ

- কনিক শব্দটির উৎপত্তি কোণক থেকে।
- কনিক সাধারণত তিন ধরনের,যেমন- পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত।
- সমতলটি কোনকের শীর্ষবিন্দু দিয়ে গেলে এক জোড়া সরলরেখা পাওয়া যাবে।
- পরাবৃত্ত, অধিবৃত্তঅসীম কিন্তু উপবৃত্তসসীম বক্ররেখা।

## পাঠোত্তর মূল্যায়ন

1. কোনো সমতল কোনকের শীর্ষবিন্দু দিয়ে গেলে পাওয়া যায়-
   (ক) এক জোড়া সরলরেখা (খ) পরাবৃত্ত (গ) উপবৃত্ত (ঘ) অধিবৃত্ত
2. (i) কোনো সমতল কোনকের শীর্ষবিন্দু দিয়ে না যেয়ে এর অক্ষের সাথে লম্বভাবে ছেদ করলে বৃত্ত পাওয়া যাবে
   (ii) এক জোড়া সরলরেখা কনিকের অন্তর্ভুক্ত নয়
   (iii) অধিবৃত্তঅসীম বক্ররেখা
   উপরের তথ্যের আলোকে কোনটি সত্য?
   (ক)i, ii (খ) i, iii (গ)ii, iii (ঘ) কোনটিই না

# বিভিন্ন ধরনের কনিক (বৃত্ত, পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত)

## পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

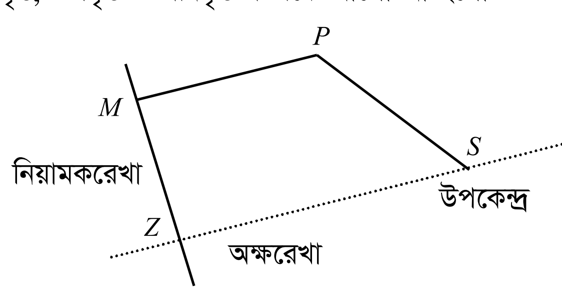
- কনিকের উপকেন্দ্র, নিয়ামকরেখা ও উৎকেন্দ্রিকতার সংজ্ঞা বলতে পারবেন,
- উৎকেন্দ্রিকতার মানের উপর ভিত্তি করে বিভিন্ন কনিকের ব্যাখ্যা দিতে পারবেন,
- পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত ও অধিবৃত্ত চিহ্নিত এবং চিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন করতে পারবেন।

| | |
|---|---|
| **মুখ্য শব্দ** | কনিক, উপকেন্দ্র, নিয়ামকরেখা, উৎকেন্দ্রিকতা, পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত |

## মূলপাঠ

বৃত্ত সম্পর্কে পূর্বে আলোচনা করা হয়েছে, তাইএইইউনিটেশুধুপরাবৃত্ত, উপবৃত্ত ও অধিবৃত্ত সম্পর্কে আলোচনা হলো-

**কনিক,উপকেন্দ্র, নিয়ামকরেখা ও উৎকেন্দ্রিকতা**




কার্তেসীয় সমতলে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু ও একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা থেকে যেসব বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত একটি ধ্রুবক, ঐসব বিন্দুর সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথকে কনিক বলে।
নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে কনিকেরউপকেন্দ্র বা ফোকাস(Focus)বলে।
নির্দিষ্ট সরলরেখাটিকে কনিকেরনিয়ামকরেখা (Directrix) বলা হয়।
ধ্রুব অনুপাতটিকে উৎকেন্দ্রিকতা (Ecentricity) বলা হয় এবং একে $e$দ্বারা সূচিত করা হয়।

**$e$-এর বিভিন্ন মানের জন্য কনিকেরআকৃতি সমূহ:**

মনে করুন, $S$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু, $MZ$ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং $P$ যেকোনো একটি বিন্দু। কনিকের সংজ্ঞানুসারে, আমরা পাই $\frac{SP}{PM} = e.$

এখন,(i) $e = 1$ অর্থাৎ $SP = PM$ হলে সঞ্চারপথ হয় পরাবৃত্ত (Parabola)। অতএব পরাবৃত্ত হলো উপকেন্দ্র ও নিয়ামকরেখা থেকে সমান দূরে অবস্থিত বিন্দুগুলোর সেট।

(ii) $0 < e < 1$ অর্থাৎ $0 < SP < PM$ হলে সঞ্চারপথ হয় উপবৃত্ত (Ellipse)। সুতরাং উপকেন্দ্র ও নিয়ামকরেখা থেকে যে সব বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত $1$-এর চেয়ে ছোট একটি ধ্রুবক তাদের সেট যে সঞ্চারপথ তৈরি করে সেটিই উপবৃত্ত।

(iii) $e > 1$ অর্থাৎ $SP > PM$ হলে সঞ্চারপথ হয় অধিবৃত্ত (Hyperbola)। একইভাবে বলা যায় যে, উপকেন্দ্র ও নিয়ামকরেখা থেকে যে সব বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত $1$-এর চেয়ে বড় একটিধ্রুবক সে সব বিন্দুর সেটই অধিবৃত্ত।

## সারসংক্ষেপ

- $e = 1$ হলে, সঞ্চারপথ পরাবৃত্ত; $0 < e < 1$ হলে, সঞ্চারপথ হয় উপবৃত্ত; $e > 1$ হলে, সঞ্চারপথ হয় অধিবৃত্ত।

## পাঠোত্তর মূল্যায়ন

1. উৎকেন্দ্রিকতার মান $\frac{2}{3}$ হলে কনিকের আকৃতি কেমন হবে?

   (ক) বৃত্ত (খ) পরাবৃত্ত (গ) উপবৃত্ত (ঘ) অধিবৃত্ত

# পরাবৃত্ত

## পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- পরাবৃত্ত অঙ্কন করতে পারবেন,
- পরাবৃত্ত সম্পর্কিত বিভিন্ন সংজ্ঞা বলতে পারবেন,
- পরাবৃত্তের প্রমিত বা আদর্শ সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন।

| | |
|---|---|
| **মুখ্য শব্দ** | অক্ষরেখা, শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্রিক দূরত্ব, উপকেন্দ্রিক জ্যা, উপকেন্দ্রিক লম্ব, প্রমিত সমীকরণ |

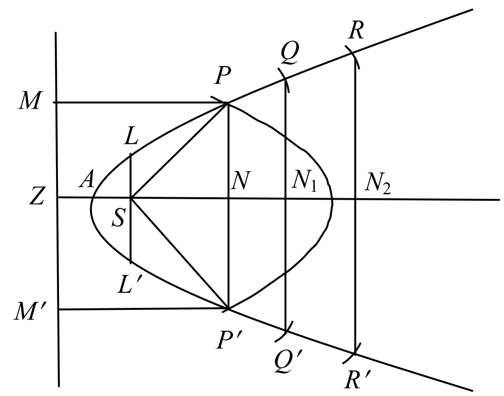
## মূলপাঠ

পাঠ-২ এ পরাবৃত্তের সংজ্ঞা দেয়া হয়েছে। এখন, কিভাবে পরাবৃত্ত অঙ্কন করা যায়- তার বিবরণ দেওয়া হল।

**পরাবৃত্ত অঙ্কন**

মনে করুন,আমরা যে পরাবৃত্তঅঙ্কন করব তার উপকেন্দ্র ও নিয়ামকরেখা হলো যথাক্রমে $S$ এবং $MM'$ ।নিয়ামকরেখার উপর $SZ$ লম্ব টানুন এবং $SZ$ এর মধ্যবিন্দু $A$ নির্ণয় করুন। অতএব $AZ = AS.$

পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, $A$ এর উপর একটি বিন্দু। $AS$ এর বর্ধিতাংশের উপর যেকোনো বিন্দু $N$ নিন এবং $ZS$ এর উপর $PNP'$ লম্ব টানুন। $S$-কে কেন্দ্র করে $ZN$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকুন যেন তা $PNP'$ কে $P$ ও $P'$ বিন্দুতে ছেদ করে এবং নিয়ামকরেখার উপর $PM$ ও $P'M'$ লম্ব টানুন। তাহলে $SP = ZN = PM$ । অতএব সংজ্ঞানুসারে, $P$ পরাবৃত্তের উপর একটি বিন্দু। আবার, $SP' = ZN = P'M'$ হওয়ায় $P'$ -ও পরাবৃত্তের উপর একটি বিন্দু।




উপরের নিয়ম অনুয়ায়ী, $AS$ বর্ধিতাংশের উপর $N_1, N_2, \ldots\ldots$ বিন্দু নিলে অধিবৃত্তের উপর $Q,\ Q',\ R,\ R', \ldots\ldots$ বিন্দুগুলোপাওয়া যাবে এবং এ বিন্দুগুলো একটি সুষম বক্ররেখা দ্বারা যোগ করলে একটি পরাবৃত্ত অঙ্কিত হবে।

জেনে রাখা ভাল এখানে, $A$ হলো পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, $A$ ও $S$ বিন্দুগামী রেখা এর অক্ষরেখা এবং অক্ষের উপর লম্ব ও S বিন্দুগামী $LSL'$ রেখাটি হলো পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব।

**প্রয়োজনীয় সংজ্ঞা**

**অক্ষরেখা(Axis):** উপকেন্দ্রের মধ্যে দিয়ে নিয়ামকেরউপর অঙ্কিত লম্বরেখাকে অক্ষরেখা বলে। অক্ষরেখাটি শীর্ষবিন্দু দিয়েও অতিক্রম করে।

**শীর্ষবিন্দু(Vertex):** পরাবৃত্ত ও ইহার অক্ষরেখার ছেদবিন্দুকে শীর্ষবিন্দু বলে।

**উপকেন্দ্রিক দূরত্ব(Focal length):** উপকেন্দ্র থেকে পরাবৃত্তের উপর যেকোনো বিন্দুর দূরত্বকে ঐ বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব বলে।

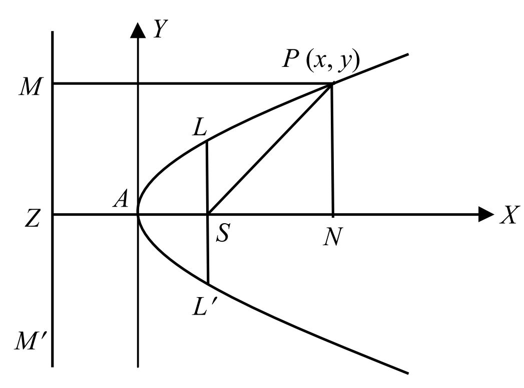
**উপকেন্দ্রিক জ্যা(Focal chord):**যে জ্যাটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র দিয়ে গমন করে, তাকে উপকেন্দ্রিক জ্যা বলে।

**উপকেন্দ্রিক লম্ব(Latusrectum):**উপকেন্দ্রিক জ্যা অক্ষরেখার উপর লম্ব হলে, তাকে উপকেন্দ্রিক লম্ব বলে।

**পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ(Standard Equation of Parabola)**

মনে করুন,পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র ও নিয়ামকরেখা হলো যথাক্রমে $S$ এবং $MM'$ ।নিয়ামকরেখার উপর $SZ$ লম্ব টানুনএবং $SZ$ -এর মধ্যবিন্দু $A$ নির্ণয় করুন। অতএব $SA = AZ$ । সংজ্ঞানুসারে, $A$ পরাবৃত্তের উপর একটি বিন্দু যা শীর্ষবিন্দু এবং $ASX$ পরাবৃত্তের অক্ষ। $AX$ ও $AY$ কে যথাক্রমে $x$-অক্ষ ও $y$-অক্ষ; $A$ কে মূলবিন্দু এবং $AS = a = ZA$ ধরলে উপকেন্দ্র $S(a,0)$ পাওয়া যাবে।

মনে করুন, $P\ (x,y)$ পরাবৃত্তের উপর যেকোনো বিন্দু। $S, P$ যোগ করুন। $P$ হতেনিয়ামকরেখা ও $AX$ এর উপর যথাক্রমে $PM$ ও $PN$ লম্ব আঁকুন। $AN = x$ এবং $PN = y.$




পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, আমরা পাই $SP = PM = ZN$

চিত্রানুযায়ী, $ZN = ZA + AN = a + x$

এখন, $SP^2 = SN^2 + PN^2 = (AN - AS)^2 + PN^2$

অর্থাৎ $(x-a)^2 = (x-a)^2 + y^2$

বা, $y^2 = (x+a)^2 - (x-a)^2$

$\therefore\ y^2 = 4ax$

এটিকে পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ বা আদর্শ সমীকরণ বলে।

**মন্তব্য:** $y$ -অক্ষকে পরাবৃত্তের অক্ষ এবং শীর্ষবিন্দুকে মূলবিন্দু ধরলে, পরাবৃত্তের সমীকরণ দাঁড়ায় $x^2 = 4a\,y$ । এটিকেও পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ বলে।

## সারসংক্ষেপ

- শীর্ষ ও উপকেন্দ্রগামী সরলরেখাটি পরাবৃত্তের অক্ষরেখা।
- অক্ষের উপর লম্ব ও উপকেন্দ্রগামী রেখাটি উপকেন্দ্রিক লম্ব।
- পরাবৃত্ত ও এরঅক্ষরেখার ছেদবিন্দু হলো শীর্ষবিন্দু।
- উপকেন্দ্র থেকে পরাবৃত্তের উপর যেকোনো বিন্দুর দূরত্ব হলো উপকেন্দ্রিক দূরত্ব।
- উপকেন্দ্রিক জ্যা পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র দিয়ে গমন করে।
- উপকেন্দ্রিক লম্ব হলো উপকেন্দ্রিক জ্যা যা অক্ষরেখার উপর লম্ব।
- পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ $y^2 = 4ax.$

## পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৫.৩

1. নিচের কোন বিন্দুটি $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত ?
   (ক) (1, 3) (খ) (1, 2) (গ) (0, 2) (ঘ) (0, 5)
2. পরাবৃত্তের অক্ষরেখা ও নিয়ামকরেখার মধ্যবর্তী কোণ-
   (ক) $60^0$ (খ) $30^0$ (গ) $90^0$ (ঘ) $0^0$
3. পরাবৃত্ত ও অক্ষরেখার ছেদবিন্দু হলো-
   (ক) শীর্ষবিন্দু (খ) উপকেন্দ্র (গ) মূলবিন্দু (ঘ) কোনটিই না

# পাঠ ৫.৪ পরাবৃত্ত(বিভিন্ন সমীকরণ)

## পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে পারবেন,
- পরাবৃত্ত সম্পর্কিত বিভিন্ন সূত্র বর্ণনা করতে পারবেন,
- ক্ষেত্রবিশেষে পরাবৃত্তের বিভিন্ন সমীকরণ ও আকৃতি সমূহ নির্ণয় করতে পারবেন,
- পরাবৃত্ত সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

| | |
|---|---|
| **মুখ্য শব্দ** | উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, দিকাক্ষ,অক্ষরেখা, শীর্ষবিন্দু, সাধারণ সমীকরণ |

## মূলপাঠ

### উপকেন্দ্রিক লম্ব(Latus rectum)

পরাবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4ax$ হলে এরসংজ্ঞানুসারে, আমরা পাই

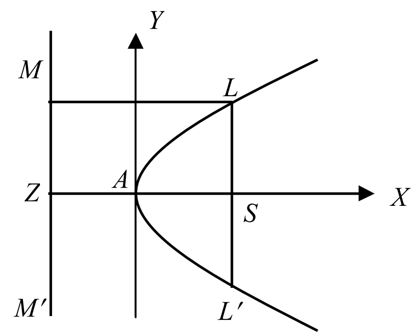
$SL = ML = ZS = AZ + AS = a + a = 2a \quad [\because AZ = AS = a]$

এখন, $LL' = SL + SL' = 2SL = 2.2a = 4a \quad [\because SL = SL']$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $LL' = |4a|$

আবার, $LL' = 4a = 2 \times 2AS = 2SZ$

অর্থাৎ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য= শীর্ষ থেকে উপকেন্দ্রের দূরত্বের চারগুণ অথবা নিয়ামকরেখা থেকে উপকেন্দ্রের দূরত্বের দ্বিগুণ।




### প্রয়োজনীয় সূত্রসমূহ

| পরাবৃত্তের সমীকরণ | $y^2 = 4ax (a > 0)$ | $y^2 = -4ax (a > 0)$ | $x^2 = 4ay (a > 0)$ | $x^2 = -4ay (a > 0)$ |
|---|---|---|---|---|
| (i)শীর্ষবিন্দর স্থানাঙ্ক | $(0,0)$ | $(0,0)$ | $(0,0)$ | $(0,0)$ |
| (ii)উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক | $(a,0)$ | $(-a,0)$ | $(0,a)$ | $(0,-a)$ |
| (iii)উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য | $4\|a\|$ | $4\|a\|$ | $4\|a\|$ | $4\|a\|$ |
| (iv)উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ | $x = a$ | $x = -a$ | $y = a$ | $y = -a$ |
| (v)দিকাক্ষের সমীকরণ | $x = -a$ | $x = a$ | $y = -a$ | $y = a$ |
| vi) অক্ষরেখার সমীকরণ | $y = 0$ | $y = 0$ | $x = 0$ | $x = 0$ |

**উদাহরণ1:** $y^2 = 5x$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

**সমাধান:**পরাবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 5x$ বা, $y^2 = 4.\frac{5}{4}x$

এখন, $y^2 = 4.\frac{5}{4}x$ সমীকরণটিকে $y^2 = 4ax$ -এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = \frac{5}{4}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4|a| = 4.\frac{5}{4} = 5$ এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, $(a,0) = \left(\frac{5}{4}, 0\right)$

**উদাহরণ2:** $y^2 = 8px$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুনযখন পরাবৃত্তটি $(4,-8)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

**সমাধান:**যেহেতু পরাবৃত্তটি $(4,-8)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে, $(-8)^2 = 8p.4$ অর্থাৎ $p = 2$

অতএব, পরাবৃত্তের সমীকরণ দাঁড়ায় $y^2 = 16x$ এবং একে $y^2 = 4ax$ -এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 4$

সুতরাং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, $4|a| = 16$, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(a,0)$ অর্থাৎ $(4,0)$.

**উদাহরণ3:** $y^2 = 10x$ পরাবৃত্তের উপরস্থকোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 8; ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

**সমাধান:**ধরুন, $P(x, y)$ পরাবৃত্তের উপর কোনো বিন্দু যার উপকেন্দ্রিক দূরত্ব, $SP = 8$

$y^2 = 10x$ কে $y^2 = 4ax$ -এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a = 10$ বা, $a = \frac{5}{2} = AS = AZ.$

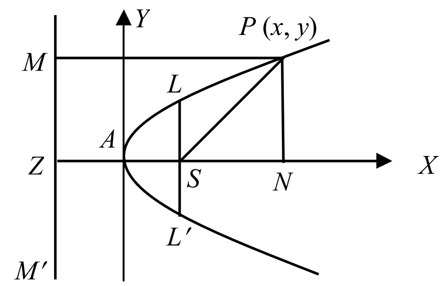
$P(x, y)$ থেকেঅক্ষরেখার উপর $PN$ লম্ব আঁকুন ।

$\therefore SP = PM = NZ = AZ + AN$

বা, $8 = a + x$ বা, $x = 8 - \dfrac{5}{2} = \dfrac{11}{2}$

$\therefore y^2 = 10.\dfrac{11}{2} = 55$ বা, $y = \pm\sqrt{55}$

অতএব, নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{11}{2}, \pm\sqrt{55}\right)$




| | |
|---|---|
| **শিক্ষার্থীর কাজ** | $x^2 = 4y$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং অক্ষ ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় করুন। উত্তরঃ $(0, 0), (0, 1), 4, \ x = 0, \ y = -1.$ |

**বিশেষ ক্ষেত্র (Special cases)**

**(i) উপকেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরে পরাবৃত্তের সমীকরণ**

এখানে,পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $S$-এর স্থানাঙ্ক $(0,0)$ , অক্ষরেখা $SX$ কে $x$-অক্ষ এবং এর উপর লম্বরেখা ও উপকেন্দ্রগামী $SY$ কে $y$-অক্ষ বিবেচনা করা হলো। ধরুন, $ZA = SA = a$ । $P(x, y)$ পরাবৃত্তের উপর যেকোনো বিন্দু হলে $SN = x$ এবং $PN = y.$

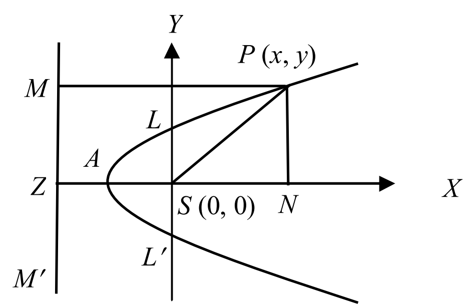
$\therefore \ ZN = SN + ZS = x + 2a$

এখানে, $SN^2 + PN^2 = SP^2 = PM^2 = ZN^2 = (x + 2a)^2$

$\therefore x^2 + y^2 = (x + 2a)^2$

বা, $y^2 = (x + 2a)^2 - x^2$

বা, $y^2 = 4a(x + a),$ এটিই নির্ণেয় সমীকরণ।




**(ii) অক্ষরেখাকে $x$-অক্ষ এবং দিকাক্ষকে $y$-অক্ষ ধরে পরাবৃত্তের সমীকরণ**

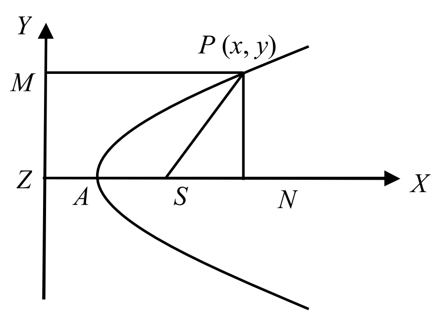
এখানে, $ZX$ -কে $x$-অক্ষ এবং নিয়ামকরেখা $ZM$ কে $y$-অক্ষ ধরলেতাদের ছেদবিন্দু $Z$ এর স্থানাঙ্ক $(0,0)$ । মনে করুন $AS = a = AZ$ এবং $P(x, y)$ পরাবৃত্তের উপর যেকোনো বিন্দু। $S, P$ যোগ করুন এবং দিকাক্ষের উপর $PM$ এবং $ZX$ এর উপর $PN$লম্ব আঁকুন ।

এখানে, $ZN = x, \ PN = y \ \therefore SN = ZN - ZS = x - 2a$

অতএব, $SN^2 + PN^2 = SP^2 = PM^2 = ZN^2$

বা, $(x - 2a)^2 + y^2 = x^2$ বা, $y^2 = x^2 - (x - 2a)^2$

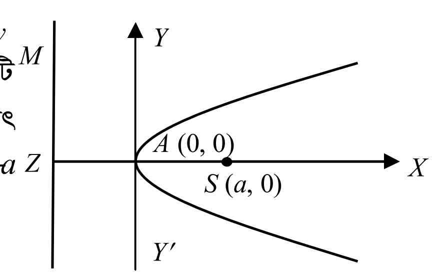
$\therefore y^2 = 4a(x - a),$ এটিই নির্ণেয় সমীকরণ।




**পরাবৃত্তের বিভিন্ন আকৃতি**

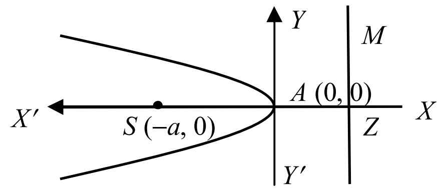
স্থানাঙ্কের অক্ষসাপেক্ষে অবস্থান ভেদে পরাবৃত্তের আকৃতি চার প্রকার। যেমন:

(i)ধরুন, পরাবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4ax \, (a > 0)$ । এখানে $x$ ঋণাত্মক হলে, $y$ কাল্পনিক হবে।কিন্তু $x$-এর যেকোনো ধনাত্মক মানের জন্য $y$-এর দুইটি সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট মান অর্থাৎ $y = \pm 2\sqrt{ax}$ পাওয়া যায়। অর্থাৎ এটি $x$-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। এর উপকেন্দ্র $S(a, 0)$, নিয়ামকরেখা $x = -a$

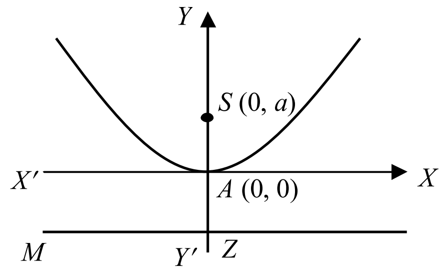


এবং অক্ষরেখা $y=0$.

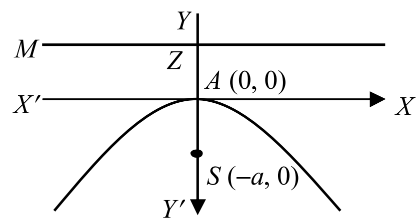
(ii)ধরুন, পরাবৃত্তের সমীকরণ $y^2=-4ax\ (a>0)$। যদি $x>0$ হয়, $y$ কাল্পনিক। অতএব পরাবৃত্তটি $y$-অক্ষের বামদিকে $x$-অক্ষের প্রতিসমরূপে অবস্থান করবে। এর উপকেন্দ্র $S(-a,0)$, নিয়ামকরেখা $x=a$ এবং অক্ষরেখা $y=0$.




(iii)ধরুন, পরাবৃত্তের সমীকরণ $x^2=4ay\ (a>0)$। এখানে $y$ ঋণাত্মক হলে, $x$ কাল্পনিক হবে। কিন্তু $y$-এর যেকোনো ধনাত্মক মানের জন্য $x$-এর দুইটি সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট মান অর্থাৎ $x=\pm 2\sqrt{ay}$ পাওয়া যায়। সুতরাং পরাবৃত্তটি $y$-অক্ষের ধনাত্মক দিকে এর প্রতিসমরূপে অবস্থান করবে। এর উপকেন্দ্র $S(0,\ a)$, শীর্ষ $A(0,\ 0)$, নিয়ামকরেখা $MZ$ এর সমীকরণ $y=-a$ এবং অক্ষরেখা $x=0$.




(iv)ধরুন, পরাবৃত্তের সমীকরণ $x^2=-4ay\ (a>0)$। যদি $y>0$ হয়, $x$ কাল্পনিক হবে। সুতরাং অধিবৃত্তটি $x$-অক্ষের নিচে $y$-অক্ষের প্রতিসম আকারে অবস্থান করবে। এর উপকেন্দ্র $S(0,-a)$ নিয়ামকরেখা $MZ$ এর সমীকরণ $y=a$, উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $y=-a$ এবং অক্ষের সমীকরণ $x=0$.




**উদাহরণ4:** $y^2=8x-8y$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, উপকেন্দ্র এবং অক্ষের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

**সমাধান:**প্রদত্ত সমীকরণটিকেনিম্নরূপে লেখা যায়

$y^2+8y=8x$ বা, $y^2+8y+16=8x+16$

বা, $(y+4)^2=8(x+2)$ -------------(1)

এখন, $x+2=X$ এবং $y+4=Y$ লিখলে(1)সমীকরণটি দাঁড়ায় $Y^2=8X$.

$y^2=4ax$ এর সাথে $Y^2=8X$ -এর তুলনা করে পাই,

শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $X=0,\ Y=0$ বা, $x=-2,\ y=-4$ অর্থাৎ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-2,-4)$; উপকেন্দ্রিক লম্ব $=8$.

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, $X=2,\ Y=0$ বা, $x=0,\ y=-4$ অর্থাৎ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0,-4)$

পরাবৃত্তের অক্ষ, $Y=0$ বা, $y+4=0$

দিকাক্ষের সমীকরণ $X=-2$ বা, $x+2=-2$ বা, $x+4=0$

**উদাহরণ5:** $3x^2-4y+6x-5=0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং অক্ষ ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

**সমাধান:**পরাবৃত্তের সমীকরণ, $3x^2-4y+6x-5=0$

বা, $3(x^2+2x+1)-4y-8=0$ বা, $3(x+1)^2=4(y+2)$

বা, $(x+1)^2=\frac{4}{3}(y+2)$ ------------------ (1)

এখন, $x+1=X$ এবং $y+2=Y$ ধরলে(1)সমীকরণটি দাঁড়ায়, $X^2=\frac{4}{3}Y$

এটিকে $x^2 = 4ay$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a=\frac{1}{3}$ এবং শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $X=0, Y=0$ বা, $x=-1,\ y=-2.$

অর্থাৎ, শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-1, -2)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4|a| = \frac{4}{3}$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $X=0, Y=a=\frac{1}{3}$ বা, $x+1=0,\ y+2=\frac{1}{3}$ বা, $x=-1,\ y=-\frac{5}{3}$

অর্থাৎ, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(-1, -\frac{5}{3}\right)$

পরাবৃত্তের অক্ষরেখার সমীকরণ $X=0$ অর্থাৎ, $x+1=0$

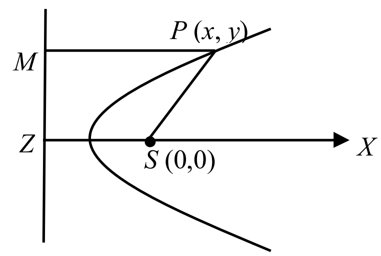
দিকাক্ষের সমীকরণ $Y=-\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}$ বা, $y+2=-\frac{1}{3}$ বা, $3y+7=0$

**উদাহরণ6:** পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রকে মূলবিন্দু এবং $x+2y-3=0$ রেখাকে দিকাক্ষ ধরে এর সমীকরণ নির্ণয় করুন।

**সমাধান:** এখানে উপকেন্দ্র $(0, 0)$, দিকাক্ষ $MZ$ এবং পরাবৃত্তের উপর যেকোনো বিন্দু $P$ এর স্থানাঙ্ক $(x, y)$.

$\therefore\ SP=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$

$P(x,y)$ হতে দিকাক্ষ $x+2y-3=0$ রেখার লম্ব দূরত্ব, $PM = \left|\frac{x+2y-3}{\sqrt{1^2+2^2}}\right| = \left|\frac{x+2y-3}{\sqrt{5}}\right|$




সংজ্ঞানুসারে, $SP = PM$

বা, $SP^2 = PM^2$

বা, $x^2+y^2=\left|\frac{x+2y-3}{\sqrt{5}}\right|^2$

বা, $5(x^2+y^2)=x^2+4y^2+9+4xy-6x-12y$

বা, $4x^2-4xy+y^2+6x+12y-9=0$

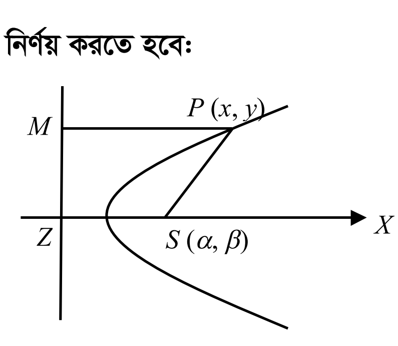
বা, $(2x-y)^2+6x+12y-9=0$, এটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

| শিক্ষার্থীর কাজ | $x^2+4x+2y=0$ পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু ও উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং অক্ষরেখা, নিয়ামকরেখা ও উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন। |
|---|---|

**পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ**

**পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র এবং দিকাক্ষের সমীকরণ দেয়া আছে, পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে:**

ধরুন, উপকেন্দ্র $S$ এর স্থানাঙ্ক $(\alpha, \beta)$, দিকাক্ষের সমীকরণ $lx+my+n=0$। $S, P$ যোগ করুনএবং নিয়ামকরেখা $MZ$ এর উপর $PM$ লম্ব আঁকুন। যেহেতু $SP=PM$ অতএব, $SP^2=PM^2$




$\therefore (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\left\{\frac{lx+my+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right\}^2$

সরলীকরণের পর পাই,

$$m^2x^2-2lmxy+l^2y^2-2x\{(l^2+m^2)\alpha+ln\}-2y\{(l^2+m^2)\beta+mn\}+(l^2+m^2)(\alpha^2+\beta^2)-n^2=0$$

লক্ষণীয় যে, $xy$ -এর দ্বিঘাত সম্বলিত পদগুলো একটি পূর্ণ বর্গ $(mx - l\,y)^2$ তৈরি করে। এটিই পরাবৃত্তের সমীকরণের বৈশিষ্ট্য। অতএব, পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণের আকৃতি $(Ax + By)^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0$

## সারসংক্ষেপ

- উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = শীর্ষ থেকে উপকেন্দ্রের দূরত্বের চারগুণ অথবা নিয়ামকরেখা থেকে উপকেন্দ্রের দূরত্বের দ্বিগুণ।
- উপকেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরে পরাবৃত্তের সমীকরণ: $y^2 = 4a\,(x + a)$
- অক্ষরেখাকে $x$-অক্ষ এবং দিকাক্ষকে $y$-অক্ষ ধরে পরাবৃত্তের সমীকরণ: $y^2 = 4a\,(x - a)$
- উপকেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরে পরাবৃত্তের সমীকরণ: $y^2 = 4a\,(x + a)$
- পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ: $(Ax + By)^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0$

## পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৫.৪

1. $y^2 = 6x$ পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, অক্ষরেখা, নিয়ামকরেখা ও উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
2. $y^2 = 2(x + 3)$ পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, অক্ষরেখা, নিয়ামকরেখা ও উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

# পাঠ ৫.৫ পরাবৃত্তের লেখচিত্র

## পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বিভিন্ন প্রকার পরাবৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবেন।

| মুখ্য শব্দ | পরাবৃত্তের লেখচিত্র, প্রতিসম |
|---|---|

## মূলপাঠ

**পরাবৃত্তের লেখচিত্র**

1. পরাবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4ax\ (a > 0)$ হলে, পরাবৃত্তটি মূলবিন্দু দিয়ে যায়। এক্ষেত্রে $x$ ঋণাত্মক হলে, $y$ -এর মান অবাস্তব; আবার $y^2 = 4ax$ সমীকরণে $y$ এর পরিবর্তে $(-y)$ স্থাপন করলে সমীকরণটির কোনো পরিবর্তন হয় না। সুতরাং পরাবৃত্তটি $x$-অক্ষের সাপেক্ষে ধনাত্মক দিকে এর প্রতিসমরূপে অবস্থান করবে এবং পরাবৃত্তটি সম্পূর্ণরূপে $y$ অক্ষের ডান অর্ধতলে অবস্থিত। আবার, $x$ -এর মানের সাথে সাথে $y$ -এর পরমমান বৃদ্ধি পায় এবং এই বৃদ্ধির কোনো শেষ নেই। ফলে পরাবৃত্ত তার অক্ষের উভয় পার্শ্বে অসীমে বিস্তৃত হয়। অন্যদিকে পরাবৃত্তের সমীকরণ যদি

$y^2 = -4ax (a > 0)$ হয়, এখানে, $y$ কাল্পনিক সংখ্যা হবে যদি $x$ ধনাত্মক হয়। এক্ষেত্রে পরাবৃত্তটি সম্পূর্ণরূপে $y$-অক্ষের বাম অর্ধতলে অবস্থিত হবে।

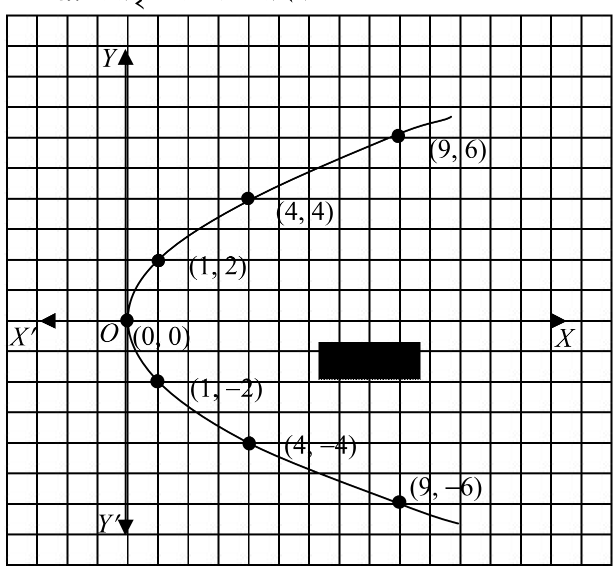
2. আবার পরাবৃত্তের সমীকরণ $x^2 = 4by \ (b > 0)$ হলে, এই পরাবৃত্তটিও মূলবিন্দু দিয়ে যায়। এক্ষেত্রে $y$-ঋণাত্মক হলে, $x$ এর মান অবাস্তব; আবার পরাবৃত্তের সমীকরণে $x$ এর পরিবর্তে $(-x)$ স্থাপন করলে সমীকরণটির কোনো পরিবর্তন হয় না। সুতরাং পরাবৃত্তটি $y$-অক্ষের সাপেক্ষে ধনাত্মক দিকে এর প্রতিসমরূপে এবং সম্পূর্ণরূপে $x$-অক্ষের উপরি অর্ধতলে অবস্থিত। আবার, $y$-এর মানের সাথে সাথে $x$-এর পরমমান বৃদ্ধি পায় এবং এই বৃদ্ধির কোনো শেষ নেই। ফলে পরাবৃত্ত তার অক্ষের উভয় পার্শ্বে অসীমে বিস্তৃত হয়। অন্যদিকে পরাবৃত্তের সমীকরণ যদি $x^2 = -4by \ (b > 0)$ হয়, এখানে, $x$ কাল্পনিক সংখ্যা হবে যদি $y$ ধনাত্মক হয়। এক্ষেত্রে পরাবৃত্তটি সম্পূর্ণরূপে $x$-অক্ষের নিচের অর্ধতলে অবস্থিত হবে।

**উদাহরণ1:**লেখচিত্র অঙ্কনকরুন, $y^2 = 4x$

পরাবৃত্তটি $(0, 0)$ বিন্দু দিয়ে যায়। $x < 0$ হলে $y$-এর মান অবাস্তব হয়; কিন্তু $x > 0$ হলে $y$-এর দুইটি সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট মান পাওয়া যায়। এর থেকে প্রতীয়মান হয় যে, $x$-অক্ষ অর্থাৎ পরাবৃত্তের নিজের অক্ষের সাপেক্ষে এটি প্রতিসম এবং পরাবৃত্তটি সম্পূর্ণরূপে $x = 0$ বা $y$-অক্ষ রেখার ডানদিকে $xy$-তলের প্রথম ও চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত। $x \geq 0$ মানেরজন্য $y$-এর সংশ্লিষ্টমানগুলো নির্ণয় করুন।

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 1 | 4 | 4 | 9 | 9 |
| $y$ | 0 | 2 | –2 | 4 | –4 | 6 | –6 |

দেখা যাচ্ছে $(0, 0)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং পরাবৃত্তটি $(1, 2), (1, -2), (4, 4), (4, -4), (9, 6), (9, -6)$, ..............প্রভৃতি বিন্দুগুলো দিয়ে যায়। ছক কাগজে $X'OX$ এবং $Y'OY$ রেখা দুইটিকে যথাক্রমে $x$-অক্ষ ও $y$-অক্ষ ধরে ক্ষুদ্রতম বর্গের এক বাহুর সমান এক একক নিয়ে বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করুন। এখন বিন্দুগুলো একটি সুষম বক্ররেখার সাহায্যে যোগ করে $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তের লেখ পাই।




**সারসংক্ষেপ**

- $y^2 = 4ax \ (a > 0)$ হলে, পরাবৃত্তটি $x$-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম এবং সম্পূর্ণরূপে $y$-অক্ষের ডান অর্ধতলে অবস্থিত।

- ✪ $y^2 = -4ax \; (a > 0)$ হলে, পরাবৃত্তটি $x$-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম এবং সম্পূর্ণরূপে $y$-অক্ষের বাম অর্ধতলে অবস্থিত।
- ✪ $x^2 = 4by \; (b > 0)$ হলে, এটি $y$-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম এবং সম্পূর্ণরূপে $x$-অক্ষের উপরি অর্ধতলে অবস্থিত।
- ✪ $x^2 = -4by \; (b > 0)$ হলে, এটি $y$-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম এবং সম্পূর্ণরূপে $x$-অক্ষের নিচের অর্ধতলে অবস্থিত।

## পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৫.৫

1. $y^2 = \dfrac{5x}{2}$ পরাবৃত্তটি $xy$-তলের কোন চতুর্ভাগে অবস্থিত?

   (ক) ১ম ও ২য় (খ) ২য় ও ৩য় (গ) ১ম ও ৪র্থ (ঘ) কোনটিই না

2. $x^2 = 4y$ পরাবৃত্তটি-

   (i) মূল বিন্দু অর্থাৎ $(0, 0)$ দিয়ে যায়
   (ii) $x$–অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম
   (iii) $x$–অক্ষের উপরি অর্ধতলে অবস্থিত
   উপরের তথ্যের আলোকে কোনটি সত্য ?

   (ক) i, ii (খ) i, iii (গ) ii, iii (ঘ) কোনটিই না

3. $y^2 = -6x$ পরাবৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন করুন।
4. $x^2 = 9y$ পরাবৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন করুন

# পাঠ ৫.৬ উপবৃত্ত

## পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- উপবৃত্ত অঙ্কন করতে পারবেন,
- উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন।

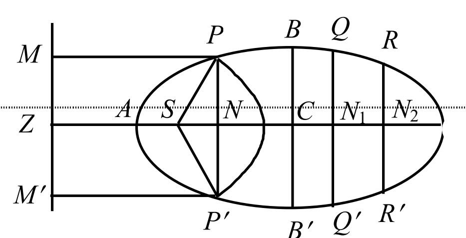
| মুখ্য শব্দ | উপবৃত্ত অঙ্কন, আদর্শ সমীকরণ |
| --- | --- |

## মূলপাঠ

**উপবৃত্ত অঙ্কন**

মনেকরুন, $S$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র, $MZM'$ উপবৃত্তের নিয়ামকরেখা এবং $e$ এর উৎকেন্দ্রিকতা, যেখানে $(0 < e < 1)$। দিকাক্ষের উপর $SZ$ লম্ব টানুন এবং $ZS$-কে বর্ধিত করুন। $SZ$-কে $A$ ও $A'$ বিন্দু দ্বারা $e$ ঃ1 অনুপাতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করুনযেন $SA : AZ = SA' : A'Z = e$ হয়।

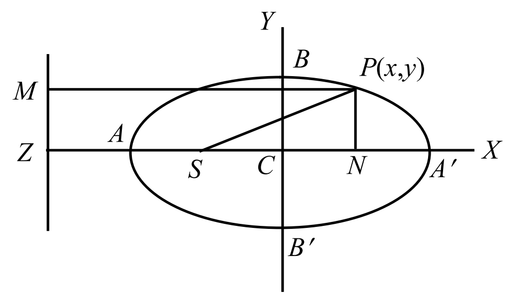
সুতরাং উপবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, $A$ ও $A'$ এর উপর দুইটি



বিন্দু। $AA'$ এর উপর যেকোনো বিন্দু $N$ নিন এবং $AA'$ এর উপর $PNP'$ লম্ব টানুন। $S$-কে কেন্দ্র করে এবং $e\cdot ZN$ সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকুন যেন তা $PNP'$ কে $P$ ও $P'$ বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে $P$ ও $P'$ উপবৃত্তের উপর দুইটি বিন্দু। $S,P$ ও $S,P'$ যোগ করুন এবং দিকাক্ষের উপর $PM$ ও $P'M'$ লম্ব আঁকুন।

এখানে সুস্পষ্ট যে, $SP = e\cdot ZN = e\cdot PM$ ।সুতরাং $P$ উপবৃত্তের উপর একটি বিন্দু। অনুরুপভাবে, $P'$ উপবৃত্তের উপর অপর একটি বিন্দু। $N$-এর মত $AA'$ এর উপর আরো বিন্দু নিলে উপবৃত্তের উপর $Q, Q', R, R', \ldots\ldots$ বিন্দুগুলোপাওয়া যাবে।এই বিন্দুগুলোর সংযোগ সুষম রেখা হলোই উপবৃত্ত।
উল্লেখ্য যে, $A$, $A'$ বিন্দু দুইটি শীর্ষ বিন্দু, $AA'$ বৃহৎ অক্ষ, $AA'$ এর মধ্যবিন্দু $C$ উপবৃত্তের কেন্দ্র। কেন্দ্র $C$ দিয়ে অঙ্কিত বৃহৎ অক্ষের উপর $BB'$ লম্ব জ্যাটি উপবৃত্তের ক্ষুদ্র অক্ষ। $AA'$ ও $BB'$ অক্ষ দুইটিকে উপবৃত্তের প্রধান অক্ষ এবং $B$, $B'$ বিন্দু দুইটিওউপবৃত্তের শীর্ষবিন্দু নামে অভিহিত।

**উপবৃত্তের প্রমিত বা আদর্শ সমীকরণ(Standard Equation of Ellipse)**




মনে করুন, $S$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র, $MZM'$ উপবৃত্তের নিয়ামকরেখা এবং $e$এর উৎকেন্দ্রিকতা, যেখানে $(0<e<1)$ । দিকাক্ষের উপর $SZ$ লম্ব টানুন এবং $ZS$-কে বর্ধিত করুন। $SZ$-কে $A$ ও $A'$ বিন্দু দ্বারা $e$ ঃ1 অনুপাতে যথাক্রমেঅন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করুন যেন $SA : AZ = SA' : A'Z = e$ হয়। $C$ এর কেন্দ্র যা $AA'$ এর মধ্যবিন্দু।
মনে করুন, $AA' = 2a;\ \therefore CA = CA' = a.$
এখন, $SA = e\cdot AZ$ বা, $a - CS = e(CZ - a)$ -------(1)
এবং $SA' = e\cdot A'Z$ বা, $a + CS = e(CZ + a)$ -------- (2)

(1)ও (2)যোগ করে পাই, $2a = 2e\cdot CZ$ বা, $CZ = \dfrac{a}{e}$

(2) থেকে (1) বিয়োগ করে পাই, $2\cdot CS = 2e\cdot a$ বা, $CS = ae$

$C$-কে মূল বিন্দু, $CX$ ও $CY$ কে যথক্রমে $x$-অক্ষ ও $y$-অক্ষ ধরুন। $P(x,y)$ উপবৃত্তের উপর যেকোনো বিন্দু নিন। $AA'$ এর উপর $PN$ ওনিয়ামকরেখার উপর $PM$ লম্ব আঁকুন।

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে, $SP = e\cdot PM = e\cdot NZ$

$\therefore\ SP^2 = e^2\cdot NZ^2$

বা, $SN^2 + PN^2 = e^2(CZ + CN)^2$

কিন্তু, $SN = CS + CN = ae + x,\ PN = y$

$$\therefore\ (ae+x)^2 + y^2 = e^2\left(\frac{a}{e} + x\right)^2$$

বা, $x^2(1-e^2) + y^2 = a^2(1-e^2)$

বা, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$ ------------- (3)

(3)-এ $x=0$ ধরলে আমরা পাই, $y = \pm a\sqrt{1-e^2}$; দেখা যাচ্ছে যে, $y$-অক্ষ উপবৃত্তকে দুইটি বাস্তব বিন্দু (যেহেতু $e<1$) $B,\ B'$-এ ছেদ করে। বিন্দু দুইটি $C$ এর বিপরীত দিকে এমনভাবে অবস্থিত যে, $CB = CB' = a\sqrt{1-e^2}.$

মনে করুন, $CB = CB' = b.$ তাহলে $b^2 = a^2(1-e^2)$ --------------------- (4)

সুতরাং (3) সমীকরণটি দাঁড়ায় $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$ যা উপবৃত্তের প্রমিত বা আদর্শ সমীকরণ।

**অনুসিদ্ধান্তঃ** সমীকরণ(4) কে এভাবে লেখা চলে $1-e^2 = \frac{b^2}{a^2}$ বা, $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2}$ বা, $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $a, b$ এর মাধ্যমে প্রকাশিত হয়েছে।

## সারসংক্ষেপ

- উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e$ হলে, $0 < e < 1$
- উপবৃত্তের শীর্ষবিন্দু দুইটি।
- উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা: $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

## পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৫.৬

1. নিচের কোনটি উপবৃত্তের সমীকরণ?

   (ক) $16x^2 - y^2 = 4$ (খ) $16x^2 + 25y^2 = 400$ (গ) $x^2 + y^2 = 1$ (ঘ) $y^2 = 4x$

2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$ যেখানে $(a > b)$ উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষ কোনটি?

   (ক) $x$-অক্ষ (খ) $y$-অক্ষ (গ) নিয়ামকরেখা (ঘ) কোনটিই না

# পাঠ ৫.৭ উপবৃত্ত (বিভিন্ন সমীকরণ)

## পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

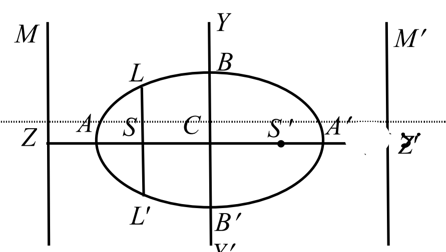
এই পাঠ শেষে আপনি-

- উপবৃত্তের উপকেন্দ্র ও নিয়ামকরেখা চিহ্নিত ও উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে পারবেন।
- বিভিন্ন রূপের উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় ও সংশ্লিষ্ট চিত্রাদি অঙ্কন করতে পারবেন,
- উপবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন,
- উপবৃত্ত সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

| **মুখ্য শব্দ** | উপবৃত্তের উপকেন্দ্র, নিয়ামকরেখা, উপকেন্দ্রিক লম্ব, সাধারণ সমীকরণ |
|---|---|

## মূলপাঠ

**উপবৃত্তের উপকেন্দ্র ও নিয়ামকরেখা**



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তটি $y$-অক্ষ বরাবর প্রতিসম বলে $y$-অক্ষের ডান ও বাম পাশে উপবৃত্তটির সমআকৃতির দুটি অংশ রয়েছে।

এখন $x$-অক্ষের উপর দুইটি বিন্দু $S'$ এবং $Z'$ এমনভাবে নেয়া হয়, যেন $CS'=CS=ae$ এবং $CZ'=CZ=\frac{a}{e}$ হয়।

$ZZ'$ উপর $M'Z'$ লম্ব আঁকা হল। এক্ষেত্রেও $S'$ কে উপকেন্দ্র এবং $M'Z'$ কে নিয়ামকরেখা ধরে আমরা একই উপবৃত্ত পাই। অতএব, উপবৃত্তের দুইটি উপকেন্দ্র $(\pm ae,0)$ এবং দুইটি নিয়ামকরেখার সমীকরণ $x=\pm\, ae$ আছে।

**উপকেন্দ্রিক লম্ব(Latus rectum)**

উপবৃত্তের যেকোনো উপকেন্দ্রের মধ্য দিয়ে অঙ্কিত বৃহৎ অক্ষের উপর লম্ব রেখার উপবৃত্তের অন্তর্গত অংশকে উপকেন্দ্রিক লম্ব বলা হয়। উপরের চিত্রে, $LSL'$ একটি উপকেন্দ্রিক লম্ব এবং $SL=SL'$, তাহলে $L$ এর স্থানাঙ্ক $(CS, SL)$ বা $(-ae, SL)$ যা উপবৃত্তের উপর অবস্থিত।

তাহলে, $\frac{a^2e^2}{a^2}+\frac{SL^2}{b^2}=1$ বা, $SL^2=b^2(1-e^2)=\frac{b^4}{a^2}$ কেননা $1-e^2=\frac{b^2}{a^2}$

বা, $SL=\pm b\sqrt{1-e^2}=\frac{b^2}{a}$

সুতরাং $L$ এবং $L'$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $\left(-ae, b\sqrt{1-e^2}\right)$ এবং $\left(-ae, -b\sqrt{1-e^2}\right)$

এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=LL'=2\,SL=\frac{2b^2}{a}$.

**উদাহরণ1:** $3x^2+4y^2=12$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

**সমাধান:** প্রদত্ত সমীকরণটিকে $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ আকারে লেখা যায়। এখানে, $b^2=3$ এবং $a=2$

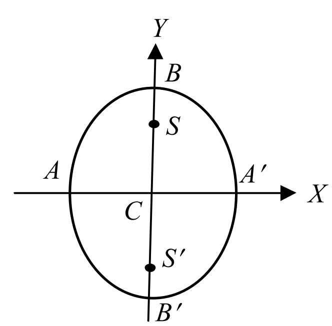
$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 3}{2}=3.$

**উপবৃত্তের সমীকরণের অন্যান্য রূপ(Other forms of the equation of an Ellipse)**

(i)উপবৃত্তের কেন্দ্রকে মূলবিন্দু, বৃহৎ অক্ষকে $y$-অক্ষ, ক্ষুদ্র অক্ষকে $x$-অক্ষ ধরলে উপবৃত্তের সমীকরণ হয় $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1.$

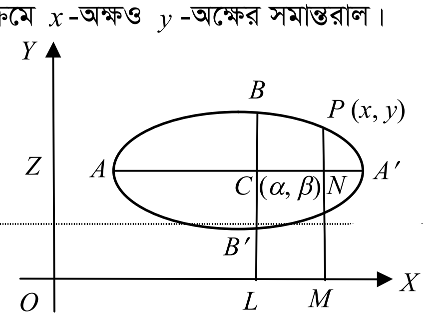
উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2a^2}{b}$; উৎকেন্দ্রিকতা: $e=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$

এক্ষেত্রে উপকেন্দ্রিক লম্ব রেখাদ্বয়ের সমীকরণ হবে $y=\pm be$ এবং নিয়ামকরেখাদ্বয়ের সমীকরণ হবে $y=\pm\frac{b}{e}$.




(ii) আমরা এখানে $(\alpha,\beta)$ কেন্দ্র ও স্থানাঙ্কের অক্ষ দুটির সমান্তরাল অক্ষ বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করব।মনে করুন, $C(\alpha,\beta)$ উপবৃত্তের কেন্দ্র, বৃহৎ অক্ষ $AA'$ ও ক্ষুদ্র অক্ষ $BB'$ হলো যথাক্রমে $x$-অক্ষও $y$-অক্ষের সমান্তরাল।

আবার মনে করুন $AA'=2a,\ BB'=2b;$ এবং $P(x,y)$ উপবৃত্তের উপর যেকোনো বিন্দু। $x$-অক্ষের উপর $PNM$ লম্ব আঁকুন যা বৃহৎ অক্ষকে $N$



বিন্দুতে ছেদ করে। উপবৃত্তের কেন্দ্র $C$-কে মূলবিন্দু ধরে, $C$-এর সাপেক্ষে $P$-এর স্থানাঙ্ক দাঁড়ায় $(CN, PN)$। যেহেতু $P$ বিন্দুটি উপবৃত্তের উপর অবস্থিত সেহেতু $\frac{CN^2}{a^2}+\frac{PN^2}{b^2}=1$

এখানে, $CN=LM=OM-OL=x-\alpha$

এবং $PN=PM-NM=PM-CL=y-\beta$

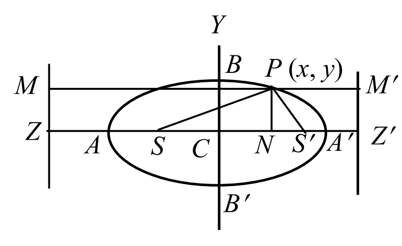
অতএব, $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$, এটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্ত সম্পর্কে নিম্নলিখিত ফলগুলো স্মরণ রাখতে হবে,

| উপবৃত্তের সমীকরণ | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$ |
|---|---|---|
| (i) উপবৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক | $(0, 0)$ | $(0, 0)$ |
| (ii) বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য, ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য | $2a,\ 2b$ | $2b,\ 2a$ |
| (iii) উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক | $(ae, 0),\ (-ae, 0)$ | $(0, be), (0, -be)$ |
| (iv) বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ, ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ | $y=0, x=0$ | $x=0,\ y=0$ |
| (v) নিয়ামক রেখাদ্বয়ের সমীকরণ | $x=\frac{a}{e},\ x=-\frac{a}{e}$ | $y=\frac{b}{e},\ y=-\frac{b}{e}$ |
| (vi) উৎকেন্দ্রিকতা | $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ | $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$ |
| (vii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য | $\frac{2b^2}{a}$ | $\frac{2a^2}{b}$ |
| (viii) উপকেন্দ্রিক লম্বদ্বয়ের সমীকরণ | $x=\pm ae$ | $y=\pm be$ |

**উপবৃত্তের উপরস্থ যেকোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব দুইটির যোগফল বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্যের সমান।**

মনে করুন, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের সমীকরণ এবং $P(x, y)$ উপবৃত্তের উপর যেকোনো বিন্দু। $S$ ও $S'$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় এবং $MZ$ ও $M'Z'$ তার নিয়ামকরেখাদ্বয়। $S, P$ ও $S', P$ যোগ করুন এবং $P(x, y)$ বিন্দু দিয়ে বৃহৎ অক্ষের সমান্তরাল রেখা আঁকুন, যা নিয়ামকরেখাদ্বয়কে $M$ ও $M'$ ছেদ করে। $MPM'$ নিয়ামকরেখাদ্বয়ের উপর লম্ব হবে।




সংজ্ঞানুসারে, $SP=e\cdot PM=e.NZ=e.(CZ+CN)=e\left(\frac{a}{e}+x_1\right)=a+ex_1$

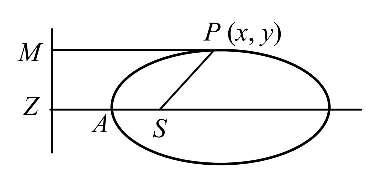
$S'P=e\cdot PM'=e.NZ'=e.(CZ'-CN)=e\left(\frac{a}{e}-x_1\right)=a-ex_1$

অতএব, $SP+S'P=a+ex_1+a-ex_1=2a.$ সুতরাং, দাবি প্রমাণিত হলো।

**উপবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ(General Equation of an Ellipse)**

মনে করুন, উপবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(\alpha, \beta)$, দিকাক্ষ $ax+by+c=0$ এবংএর উৎকেন্দ্রিকতা $e(<1)$. $P(x, y)$ উপবৃত্তের উপর একটি বিন্দু। $S, P$ যোগ করুন এবং দিকাক্ষের উপর $PM$ লম্ব টানুন।

সংজ্ঞানুসারে, $SP=e\cdot PM$ বা, $SP^2=e^2\cdot PM^2$



বা, $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2\ \dfrac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$.

**উদাহরণ2:** $16x^2+25y^2=400$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র,উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং লম্বের ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

**সমাধান:**উপবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.অতএব, $a=5$ এবং $b=4$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{25-16}}{5}=\dfrac{3}{5}$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(ae,0)$ ও $(-ae,0)$; এখানে উপকেন্দ্র $\left(5\cdot\dfrac{3}{5},0\right)=(3,0)$ এবং $\left(-5\cdot\dfrac{3}{5},0\right)=(-3,0)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\cdot 4^2}{5}=\dfrac{32}{5}$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $x=\pm ae$ অর্থাৎ, $x=\pm 5\cdot\dfrac{3}{5}=\pm 3$

দিকাক্ষের সমীকরণ $x=\pm\dfrac{a}{e}$ বা, $x=\pm\dfrac{5}{\frac{3}{5}}$ বা, $x=\pm\dfrac{25}{3}$

**উদাহরণ3:** $p$ -এর মান কত হলে $4x^2+py^2=80$ উপবৃত্তটি $(0,\pm 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রমে করবে? উপবৃত্তটির অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য এবং উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় করুন।

**সমাধান:**যদি $4x^2+py^2=80$ উপবৃত্তটি $(0,\pm 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে, তবে $0+16p=80$ বা, $p=5$ হবে।

সুতরাং উপবৃত্তের সমীকরণ হবে $4x^2+5y^2=80$ বা, $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{16}=1$ বা, $\dfrac{x^2}{(2\sqrt{5})^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$

সুতরাং $a=2\sqrt{5}$ এবং $b=4$

অতএব, অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য হবে $4\sqrt{5}$ এবং ৪

উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{20-16}}{\sqrt{20}}=\dfrac{2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

**উদাহরণ4:** $\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{y^2}{169}=1$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটি নির্ণয় করুন।

**সমাধান:**এখানে, $a=12$ এবং $b=13$ লক্ষনীয় যে, $a<b$ । সুতরাং উপবৃত্তটির বৃহৎ অক্ষ $y$ -অক্ষের উপর অবস্থিত।

অতএব, $e=\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}=\dfrac{\sqrt{169-144}}{13}=\dfrac{5}{13}$

সুতরাং, উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক $(0,\pm be)$ অর্থাৎ $\left(0,\pm 13\cdot\dfrac{5}{13}\right)=(0,\pm 5)$

**উদাহরণ5:**একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুনযার উপকেন্দ্র $(1,-1)$, দিকাক্ষের সমীকরণ $x-y+2=0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ; এর উৎকেন্দ্রিক লম্বও নির্ণয় করুন।

**সমাধান:**মনে করুন, $P(x,y)$ উপবৃত্তের উপর যেকোনো বিন্দু, উপবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(1,-1)$ এবং $PM$ তার নিয়ামকরেখা $x-y+2=0$ -এর উপর লম্ব ।

তাহলে সংজ্ঞানুসারে, $SP=e\cdot PM$

বা, $\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x-y+2}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{x-y+2}{2}$

বা, $(x-1)^2+(y+1)^2=\frac{(x-y+2)^2}{4}$

বা, $3x^2+3y^2+2xy-12x+12y+4=0$, এটিই উপবৃত্তের সমীকরণ।

উপকেন্দ্রিক লম্ব $=LL'=2e.\ SZ$

এখন, $SZ=S(1,\ -1)$ থেকে $x-y+2=0$ রেখার লম্ব দূরত্ব

$\therefore\ SZ=\frac{1+1+2}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

$\therefore\ LL'=2e.\ SZ=2.\frac{1}{\sqrt{2}}.2\sqrt{2}=4$

**উদাহরণ6:**একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুনযার উপকেন্দ্র দুইটি $S'(2,0)$ এবং $S(-2,0)$ এবং যা $P\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

**সমাধান:**মনে করুন, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$PS=\sqrt{\left(\frac{3}{2}+2\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{49}{4}+\frac{15}{4}}=4$

এবং $PS'=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-2\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{15}{4}}=2$

$P$ বিন্দুর ফোকাস দূরত্ব দুইটির যোগফল বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্যের সমান।

$\therefore\ 2a=PS+PS'=4+2=6\quad \therefore a=3$

অতএব, উপবৃত্তের সমীকরণ হবে $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1$

যেহেতু, উপবৃত্ত $P\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ বিন্দু দিয়ে যায়, অতএব, $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{9}+\frac{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}{b^2}=1$

বা, $\frac{1}{4}+\frac{15}{4b^2}=1$ বা, $\frac{15}{4b^2}=\frac{3}{4}$ বা, $3b^2=15$ অর্থাৎ, $b^2=5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1.$

## পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৫.৭

1. $5x^2+4y^2=1$ উপবৃত্তের দিকাক্ষ দুইটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।
2. একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যার উপকেন্দ্র দুইটি $S'(2,0)$ এবং $S(-2,0)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা 3.