
Welcome

শিক্ষক পরিচিতি

মোঃ রাসেল মিয়া

ইন্সট্রাক্টর (নন-টেক)গনিত

রংপুর পলিটেকনিক ইন্সটিটিউট, রংপুর

পাঠ পরিচিতি

শ্রেণিঃ দ্বিতীয় সেমিস্টার
বিষয়ঃ গণিত -২
বিষয় কোডঃ২৫৯২১
অধ্যায়ের নামঃ সূচক ধারা
টেকনোলজিঃ সকল
লেকচার-০১

পাঠ ঘোষণা

সূচক ধারার প্রয়োজনীয় সূত্র ও গাণিতিক সমস্যার সমাধান

শিখনফল

এই পাঠ থেকে শিক্ষার্থীরা...........

- **e** এর ধারা বলতে পারবে।
- সূচক ধারার সূত্রগুলো জানতে পারবে।
- গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

e এর ধারাঃ

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ \ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{r!}+\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

অসীম পদ পর্যন্ত ধারাটিকে সাধারণত e প্রতীক চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হয়। লগারিদমের ভিত্তি হিসাবে e-এর ব্যবহার উচ্চতর গণিতের বিকাশের ক্ষেত্রে খুবই গুরুত্বপূর্ণ। $loge$ প্রতীকের বদলে lne লিখা যায়।

প্রমাণ করতে হবে যে, e একটি সসীম সংখ্যা এবং এর মান 2 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং 3 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অর্থাৎ $2 < e < 3$

প্রমাণঃ আমরা জানি,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{r!} + \ \ldots\ldots\ldots \infty$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\ \ldots\ldots + \frac{1}{r!} + \ \ldots\ldots\ldots \infty$$

সুতরাং $e > 2$

আবার, $3! = 1.2.3 > 2^2$

$$\therefore\ \frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}$$

$$4! = 1.2.3.4 > 2^3$$

$$\therefore\ \frac{1}{4!} < \frac{1}{2^3}$$

অনুরূপভাবে, $\frac{1}{5!} < \frac{1}{2^4}$, $\frac{1}{6!} < \frac{1}{2^5}$ ইত্যাদি

$\therefore e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ \dots\dots\dots\dots\infty < 1 + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ \dots\dots\dots\dots\infty)$

$e < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3$ $[\because S_\infty = \frac{a}{1-r}, \mathrm{a} = 1, \mathrm{r} = \frac{1}{2}]$

অর্থাৎ $e < 3$

সুতরাং e এর মান 2 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং 3 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং এটি একটি সসীম সংখ্যা।

$\therefore 2 < e < 3$ (প্রমাণিত)

সাধারণত $e = 2.7182818$ ধরা হয়।

প্রয়োজনীয় সূত্র

1. $e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ \dots\dots\dots + \frac{x^n}{n!} + \ \dots\dots\dots\infty$

2. $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ \dots\dots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + \ \dots\dots\dots\infty$

3. $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ \dots\dots\dots + \frac{1}{n!} + \ \dots\dots\dots\infty$

4. $e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ \dots\dots\dots + (-1)^n\frac{1}{n!} + \ \dots\dots\dots\infty$

5. $a^{x} = 1 + \frac{x}{1!}(log_e a) + \frac{x^2}{2!}(log_e a)^2 + \frac{x^3}{3!}(log_e a)^3 +$
$\dots\dots + (-1)^n\frac{x^n}{n!}(log_e a)^n + \ \dots\dots\dots\infty$

6. $a^{-x} = 1 - \frac{x}{1!}(log_e a) + \frac{x^2}{2!}(log_e a)^2 - \frac{x^3}{3!}(log_e a)^3 +$
$\dots\dots + (-1)^n\frac{x^n}{n!}(log_e a)^n + \ \dots\dots\dots\infty$

প্রয়োজনীয় সূত্র

7. $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \infty$

8. $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \infty$

9. $\frac{1}{2}\left(e + e^{-1}\right) = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \infty$

10. $\frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right) = 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \infty$

প্রয়োজনীয় সূত্র

11. সমান্তর ধারার n তম পদ $= a + (n-1)d$

12. সমান্তর ধারার যোগফল $S = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

13. গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

14. গুণোত্তর ধারার যোগফল $S = a.\frac{1-r^n}{1-r}$, যখন $r < 1$

$= a.\frac{r^n-1}{r-1}$, যখন $r > 1$

15. $1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots\dots\dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$(-\boldsymbol{n})!$ ও $\frac{\mathbf{1}}{(-\boldsymbol{n})!}$ এর তাৎপর্যঃ

আমরা জানি, $\mathbf{n}! = \boldsymbol{n}.(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})!$

$$\Rightarrow (n-1)! = \frac{n!}{n}$$

$n = 1,0,-1,-2,-3,-4$ ইত্যাদি বসাই,

$$\therefore 0! = \frac{1!}{1} = 1$$

$$\therefore (-1)! = \frac{0!}{0} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\therefore (-2)! = \frac{(-1)!}{-1} = \frac{\infty}{-1} = -\infty$$

$$\therefore (-3)! = \frac{(-2)!}{-2} = \frac{-\infty}{-2} = \infty$$

$$\therefore (-4)! = \frac{(-3)!}{-3} = \frac{\infty}{-3} = -\infty$$

16. (i) $\boldsymbol{n}$ **জোড় পূর্ণ সংখ্যা হলে,** $(-\boldsymbol{n})! = -\infty$

(ii) $\boldsymbol{n}$ **বিজোড় পূর্ণ সংখ্যা হলে,** $(-\boldsymbol{n})! = \infty$

(iii) $\boldsymbol{n}$ **যোগবোধক পূর্ণ সংখ্যা হলে,** $\frac{1}{(-\boldsymbol{n})!} = \mathbf{0}$ [$\boldsymbol{n}$ **জোড় ও বিজোড় হলে**]

সমস্যাঃ১

দেখাও যে, $\frac{1^3}{1!}+\frac{2^3}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{4^3}{4!}+\ \dots\dots\dots\dots\infty=5e$

সমাধানঃ L.H.S= $\frac{1^3}{1!}+\frac{2^3}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{4^3}{4!}+\ \dots\dots\infty$

ধরি ধারাটির তম পদ U_n এবং সমষ্টি S_n

এখানে, $U_n=\frac{n^3}{n!}=\frac{n^3}{n.(n-1)!}=\frac{n^2}{(n-1)!}=\frac{n^2-1+1}{(n-1)!}$

$$=\frac{n^2-1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!}=\frac{(n+1)(n-1)}{(n-1).(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}$$

$$=\frac{n+1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}=\frac{n-2+3}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}$$

$$=\frac{n-2}{(n-2)!}+\frac{3}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}$$

$$=\frac{n-2}{(n-2).(n-3)!}+\frac{3}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}$$

$$=\frac{1}{(n-3)!}+\frac{3}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}$$

$$\therefore U_n = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

এখন পর্যায়ক্রমে $n = 1,2,3,4,5,6,\ldots\ldots$ ইত্যাদি বসিয়ে পাই,

$$\therefore U_1 = \frac{1}{(-2)!} + \frac{3}{(-1)!} + \frac{1}{0!} = 0 + 0 + 1$$

$$\therefore U_2 = \frac{1}{(-1)!} + \frac{3}{0!} + \frac{1}{1!} = 0 + 3 + \frac{1}{1!}$$

$$\therefore U_3 = \frac{1}{0!} + \frac{3}{1!} + \frac{1}{2!} = 1 + \frac{3}{1!} + \frac{1}{2!}$$

$$\therefore U_4 = \frac{1}{1!} + \frac{3}{2!} + \frac{1}{3!}$$

$$\therefore U_5 = \frac{1}{2!} + \frac{3}{3!} + \frac{1}{4!}$$

$$\therefore U_6 = \frac{1}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{1}{5!}$$

....

....

এ পদগুলো যোগ করে পাই,

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\infty$$

$$\Rightarrow S_n = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ \ldots\ldots..\right) + 3\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ \ldots\ldots.\right) + (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots..)$$

$$= e + 3e + e = 5e = R.H.S$$

সমস্যাঃ২

দেখাও যে, $\frac{2}{1!}+\frac{2+4}{2!}+\frac{2+4+6}{3!}+\ \dots\dots\dots\dots\infty=3e$

সমাধানঃ L.H.S= $\frac{2}{1!}+\frac{2+4}{2!}+\frac{2+4+6}{3!}+\ \dots\dots\dots\dots\infty$

ধরি ধারাটির তম পদ U_n এবং সমষ্টি S_n

এখানে, $U_n=\frac{2+4+6+8+\ \dots\dots+2n}{n!}=\frac{2(1+2+3+4+\ \dots\dots\dots+n)}{n!}$

$$=\frac{2.\frac{n(n+1)}{2}}{n!}=\frac{n(n+1)}{n!}=\frac{n(n+1)}{n.(n-1)!}$$

$$=\frac{n+1}{(n-1)!}=\frac{n-1+2}{(n-1)!}=\frac{n-1}{(n-1)!}+\frac{2}{(n-1)}$$

$$=\frac{n-1}{(n-1).(n-2)!}+\frac{2}{(n-1)!}$$

$$=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{2}{(n-1)!}$$

$$\therefore U_n = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!}$$

এখন পর্যায়ক্রমে n =1,2,3,4,5,...... ইত্যাদি বসিয়ে পাই,

$$\therefore U_1 = \frac{1}{(-1)!} + \frac{2}{0!} = 0 + 2$$

$$\therefore U_2 = \frac{1}{0!} + \frac{2}{1!} = 1 + \frac{2}{1!}$$

$$\therefore U_3 = \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!}$$

$$\therefore U_4 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!}$$

$$\therefore U_5 = \frac{1}{3!} + \frac{2}{4!}$$

....

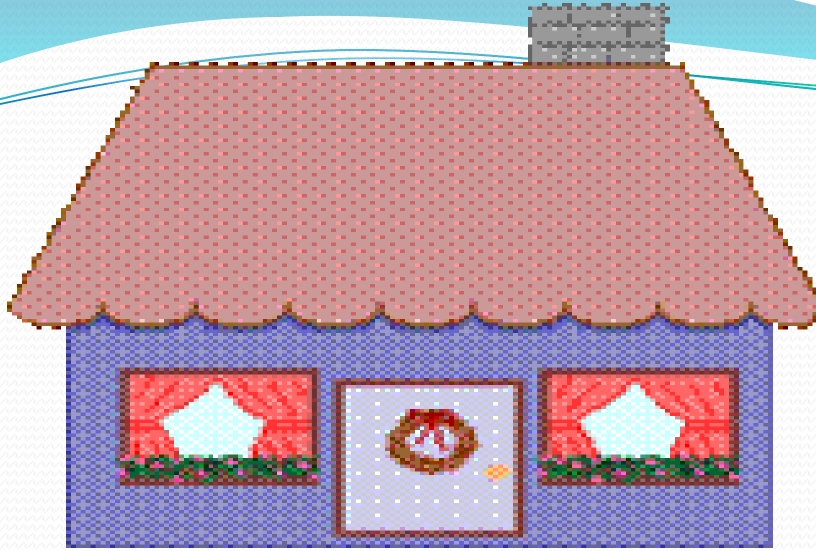
....

এ পদগুলো যোগ করে পাই,

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + \ \ldots\ldots\ldots\ldots.\infty$$

$$\Rightarrow S_n = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ \dots\dots..\right) + 2\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ \dots\dots..\right)$$

$$= e + 2e = 3e = R.H.S$$



বাড়ীর কাজ

- $\frac{1^2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^2}{3!}+\frac{4^2}{4!}+\ \dots\dots\dots\dots\infty$ ধারাটির যোগফল নির্ণয় কর।

- **দেখাও যে,**

$$\frac{1}{1!}+\frac{1+3}{2!}+\frac{1+3+5}{3!}+\frac{1+3+5+7}{4!}\ \dots\dots\dots\infty=2e$$


ধন্যবাদ