

A vibrant purple rose with several green leaves is positioned in the upper right quadrant of the image. The rose is the central focus, with its petals tightly packed and showing a gradient of purple shades. The leaves are a deep green with visible veins. The background is a solid, light blue color. The word "Welcome" is written in a dark purple, elegant cursive font across the lower half of the image, partially overlapping the bottom of the rose and leaves.

Welcome

# শিক্ষক পরিচিতি

মোঃ রাসেল মিয়া

ইন্সট্রাক্টর (নন-টেক) গণিত

বংপুর পলিটেকনিক ইন্সটিটিউট, বংপুর



# পাঠ পরিচিতি

শ্রেণি: দ্বিতীয় সেমিস্টার  
বিষয়: গণিত -২  
বিষয় কোড:২৫৯২১  
অধ্যায়ের নাম: সূচক ধারা  
টেকনোলজি: সকল  
লেকচার-০১

# পাঠ ঘোষণা

সূচক ধারার প্রয়োজনীয় সূত্র ও গাণিতিক  
সমস্যার সমাধান

## শিখনফল

এই পাঠ থেকে শিক্ষার্থীরা.....

- **e** এর ধারা বলতে পারবে।
- সূচক ধারার সূত্রগুলো জানতে পারবে।
- গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

$e$  এর ধারা:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{r!} + \dots$$

অসীম পদ পর্যন্ত ধারাটিকে সাধারণত  $e$  প্রতীক চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হয়। লগারিদমের ভিত্তি হিসাবে  $e$ -এর ব্যবহার উচ্চতর গণিতের বিকাশের ক্ষেত্রে খুবই গুরুত্বপূর্ণ।  $\log_e$  প্রতীকের বদলে  $\ln e$  লিখা যায়।

প্রমাণ করতে হবে যে,  $e$  একটি সসীম সংখ্যা এবং এর মান 2 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং 3 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অর্থাৎ  $2 < e < 3$

প্রমাণঃ আমরা জানি,

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{r!} + \dots \infty \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{r!} + \dots \infty \end{aligned}$$

সুতরাং  $e > 2$

আবার,  $3! = 1.2.3 > 2^2$

$$\therefore \frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}$$

$$4! = 1.2.3.4 > 2^3$$

$$\therefore \frac{1}{4!} < \frac{1}{2^3}$$

অনুরূপভাবে,  $\frac{1}{5!} < \frac{1}{2^4}$ ,  $\frac{1}{6!} < \frac{1}{2^5}$  ইত্যাদি

$$\therefore e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \dots \dots \infty < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \dots \dots \infty\right)$$

$$e < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3 \left[ \because S_{\infty} = \frac{a}{1-r}, a = \right.$$

$$\left. 1, r = \frac{1}{2} \right]$$

অর্থাৎ  $e < 3$

সুতরাং  $e$  এর মান 2 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং 3 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং এটি একটি সসীম সংখ্যা।

$$\therefore 2 < e < 3 \text{ (প্রমাণিত)}$$

সাধারণত  $e = 2.7182818$  ধরা হয়।

## প্রয়োজনীয় সূত্র

$$1. e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \dots \dots \infty$$

$$2. e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots \dots \dots \infty$$

$$3. e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \dots \dots \infty$$

$$4. e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \dots \dots \dots \infty$$

$$5. a^x = 1 + \frac{x}{1!} (\log_e a) + \frac{x^2}{2!} (\log_e a)^2 + \frac{x^3}{3!} (\log_e a)^3 + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} (\log_e a)^n + \dots \dots \dots \infty$$

$$6. a^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} (\log_e a) + \frac{x^2}{2!} (\log_e a)^2 - \frac{x^3}{3!} (\log_e a)^3 + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} (\log_e a)^n + \dots \dots \dots \infty$$

## প্রয়োজনীয় সূত্র

$$7. \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \dots \dots \dots \infty$$

$$8. \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \dots \dots \infty$$

$$9. \frac{1}{2}(e + e^{-1}) = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \dots \dots \dots \infty$$

$$10. \frac{1}{2}(e - e^{-1}) = 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \dots \dots \dots \infty$$

## প্রয়োজনীয় সূত্র

11. সমান্তর ধারার  $n$  তম পদ  $= a + (n - 1)d$

12. সমান্তর ধারার যোগফল  $S = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$

13. গুণোত্তর ধারার  $n$  তম পদ  $= ar^{n-1}$

14. গুণোত্তর ধারার যোগফল  $S = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$ , যখন  $r < 1$   
 $= a \cdot \frac{r^n-1}{r-1}$ , যখন  $r > 1$

15.  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$(-n)!$  ও  $\frac{1}{(-n)!}$  এর তাৎপর্য:  
আমরা জানি,  $n! = n \cdot (n - 1)!$

$$\Rightarrow (n - 1)! = \frac{n!}{n}$$

$n = 1, 0, -1, -2, -3, -4$  ইত্যাদি বসাই,

$$\therefore 0! = \frac{1!}{1} = 1$$

$$\therefore (-1)! = \frac{0!}{0} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\therefore (-2)! = \frac{(-1)!}{-1} = \frac{\infty}{-1} = -\infty$$

$$\therefore (-3)! = \frac{(-2)!}{-2} = \frac{-\infty}{-2} = \infty$$

$$\therefore (-4)! = \frac{(-3)!}{-3} = \frac{\infty}{-3} = -\infty$$

16. (i)  $n$  জোড় পূর্ণ সংখ্যা হলে,  $(-n)! = -\infty$

(ii)  $n$  বিজোড় পূর্ণ সংখ্যা হলে,  $(-n)! = \infty$

(iii)  $n$  যোগবোধক পূর্ণ সংখ্যা হলে,  $\frac{1}{(-n)!} = 0$  [ $n$  জোড় ও বিজোড় হলে]

## সমস্যাঃ ১

দেখাও যে,  $\frac{1^3}{1!} + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4^3}{4!} + \dots \dots \dots \infty = 5e$

সমাধানঃ L.H.S =  $\frac{1^3}{1!} + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4^3}{4!} + \dots \dots \infty$

ধরি ধারাটির তম পদ  $U_n$  এবং সমষ্টি  $S_n$

$$\begin{aligned} \text{এখানে, } U_n &= \frac{n^3}{n!} = \frac{n^3}{n \cdot (n-1)!} = \frac{n^2}{(n-1)!} = \frac{n^2-1+1}{(n-1)!} \\ &= \frac{n^2-1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{(n+1)(n-1)}{(n-1) \cdot (n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \\ &= \frac{n+1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{n-2+3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \\ &= \frac{n-2}{(n-2)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \\ &= \frac{n-2}{(n-2) \cdot (n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \end{aligned}$$

$$\therefore U_n = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

এখন পর্যায়ক্রমে  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$  ইত্যাদি বসিয়ে পাই,

$$\therefore U_1 = \frac{1}{(-2)!} + \frac{3}{(-1)!} + \frac{1}{0!} = 0 + 0 + 1$$

$$\therefore U_2 = \frac{1}{(-1)!} + \frac{3}{0!} + \frac{1}{1!} = 0 + 3 + \frac{1}{1!}$$

$$\therefore U_3 = \frac{1}{0!} + \frac{3}{1!} + \frac{1}{2!} = 1 + \frac{3}{1!} + \frac{1}{2!}$$

$$\therefore U_4 = \frac{1}{1!} + \frac{3}{2!} + \frac{1}{3!}$$

$$\therefore U_5 = \frac{1}{2!} + \frac{3}{3!} + \frac{1}{4!}$$

$$\therefore U_6 = \frac{1}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{1}{5!}$$

.....

.....

এ পদগুলো যোগ করে পাই,

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + \dots \dots \dots \infty$$

$$\Rightarrow S_n =$$

$$\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \dots \dots\right) +$$

$$3 \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \dots \dots\right) + \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} +$$

$$\dots \dots \dots\right)$$

$$= e + 3e + e = 5e = R.H.S$$

## সমস্যা: ২

$$\text{দেখাও যে, } \frac{2}{1!} + \frac{2+4}{2!} + \frac{2+4+6}{3!} + \dots \dots \dots \infty = 3e$$

$$\text{সমাধান: L.H.S} = \frac{2}{1!} + \frac{2+4}{2!} + \frac{2+4+6}{3!} + \dots \dots \dots \infty$$

ধরি ধারাটির তম পদ  $U_n$  এবং সমষ্টি  $S_n$

$$\begin{aligned} \text{এখানে, } U_n &= \frac{2+4+6+8+\dots\dots+2n}{n!} = \frac{2(1+2+3+4+\dots\dots+n)}{n!} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}}{n!} = \frac{n(n+1)}{n!} = \frac{n(n+1)}{n \cdot (n-1)!} \\ &= \frac{n+1}{(n-1)!} = \frac{n-1+2}{(n-1)!} = \frac{n-1}{(n-1)!} + \frac{2}{(n-1)!} \\ &= \frac{n-1}{(n-1) \cdot (n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!} \end{aligned}$$

$$\therefore U_n = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!}$$

এখন পর্যায়ক্রমে  $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$  ইত্যাদি বসিয়ে পাই,

$$\therefore U_1 = \frac{1}{(-1)!} + \frac{2}{0!} = 0 + 2$$

$$\therefore U_2 = \frac{1}{0!} + \frac{2}{1!} = 1 + \frac{2}{1!}$$

$$\therefore U_3 = \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!}$$

$$\therefore U_4 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!}$$

$$\therefore U_5 = \frac{1}{3!} + \frac{2}{4!}$$

.....

.....

এ পদগুলো যোগ করে পাই,

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + \dots \dots \dots \infty$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow S_n &= \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\dots\dots\right) + \\ &\quad 2\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots\dots\dots\right) \\ &= e + 2e = 3e = R.H.S\end{aligned}$$



## বাড়ীর কাজ

➤  $\frac{1^2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \frac{4^2}{4!} + \dots \dots \dots \infty$  ধারাটির যোগফল

নির্ণয় কর।

➤ দেখাও যে,

$$\frac{1}{1!} + \frac{1+3}{2!} + \frac{1+3+5}{3!} + \frac{1+3+5+7}{4!} \dots \dots \dots \infty = 2e$$

