Welcome To My Presentation

Course Name	**:Mathematics**
Chapter	**: Partial Fractions**
Course Code	**:** 25921
Semester	**:** 2^{nd}
Date	**:** 05/10/2024

Presented By

MD. IMAM HOSSAIN

Jr. Instructor (Mathematics)

Barisal Polytechnic Institute, Barisal.

01533-729320

"Mathematics is the queen of the sciences."

---Carl Friedrich Gauss

আংশিক ভগ্নাংশ (Partial Fractions)

ভগ্নাংশ (Fraction): হর ও লব বিশিষ্ট গাণিতিক রাশিকে ভগ্নাংশ বলে।

আংশিক ভগ্নাংশ (Partial Fraction): যদি কোন মূলদ বীজগাণিতিক ভগ্নাংশকে দুই বা ততোধিক সহজ ভগ্নাংশের যোগফলরূপে প্রকাশ করা হয়, তখন এই ভগ্নাংশগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথম ভগ্নাংশের আংশিক ভগ্নাংশ বলে।

মূল ধারণা:

আংশিক ভগ্নাংশ হল এক ধরনের পদ্ধতি যেখানে জটিল ভগ্নাংশকে সহজ ভগ্নাংশের সমষ্টিতে বিভক্ত করা হয়। এটি সাধারণত অজানা ভগ্নাংশের সাথে কাজ করার সময় ব্যবহৃত হয়, বিশেষ করে ইন্টিগ্রেশনের ক্ষেত্রে।

উদাহরণ:

একটি সাধারণ ভগ্নাংশ ধরা যাক:

$$\frac{2x + 3}{(x-1)(x-2)}$$

এই ভগ্নাংশকে দুটি আংশিক ভগ্নাংশে ভাঙা যেতে পারে:

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

এখন, A এবং B এর মান নির্ণয় করতে হবে।

ধাপ ১: সমীকরণের দুই পাশে LCM নেওয়া

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

এখন সমীকরণের উভয় পাশের হর একই, তাই:

$$2x+3=A(x+2)+B(x-1)$$

ধাপ ২: মান নির্ণয়

এখন, x এর জন্য বিভিন্ন মান বসিয়ে A এবং B এর মান বের করব।

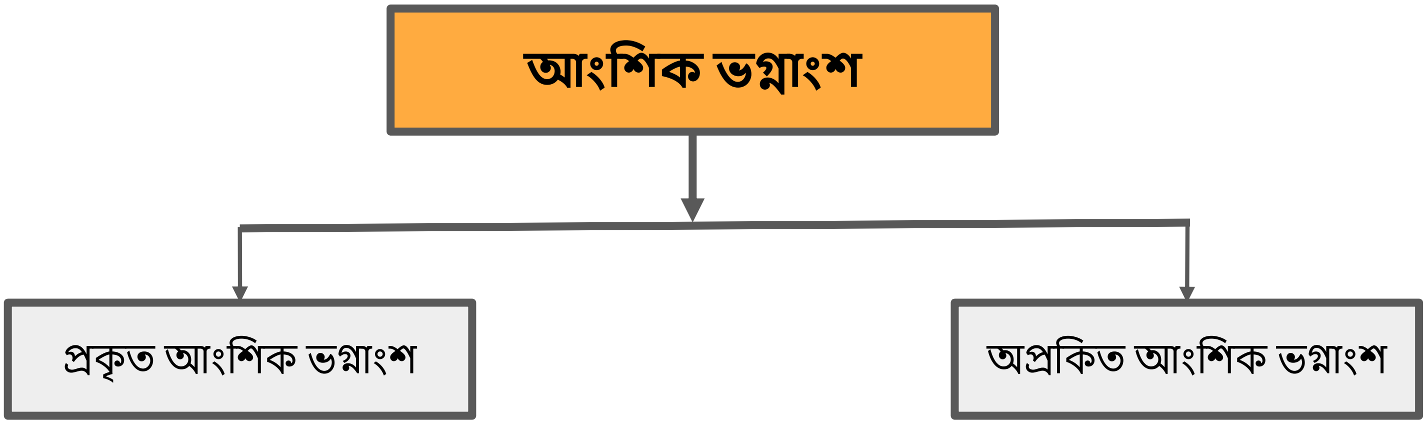
- x=1 বসালে: $$2(1)+3=A(1+2)+B(0)$$ $$5=3A\Rightarrow A=\frac{5}{3}$$
- x=−2 বসালে: $$2(-2)+3=A(0)+B(-2-1)$$ $$-4+3=-3B\Rightarrow B=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$$

ধাপ ৩: আংশিক ভগ্নাংশের সমীকরণ

এখন, A এবং B এর মান বসিয়ে:

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x+2)} = \frac{5}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+2)}$$

এটাই আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্তির চূড়ান্ত রূপ।



প্রকৃত আংশিক ভগ্নাংশ (Proper Partial Fraction): যদি কোনো রেশনাল এক্সপ্রেশনে লবের ডিগ্রি (শীর্ষের ঘাত) হররের ডিগ্রির থেকে কম হয়, তখন তাকে প্রকৃত ভগ্নাংশ বলা হয়। একে সরাসরি আংশিক ভগ্নাংশে ভাঙা যায়।

অপ্রকিত আংশিক ভগ্নাংশ (Improper Partial Fraction): যদি লবের ডিগ্রি হররের ডিগ্রির থেকে সমান বা বেশি হয়, তাকে অপ্রকিত ভগ্নাংশ বলা হয়। এ ধরনের ভগ্নাংশকে আগে ভাগ করে প্রকৃত ভগ্নাংশ বানিয়ে তারপর আংশিক ভগ্নাংশে ভাঙা হয়।

→ প্রকৃত আংশিক ভগ্নাংশের বিভিন্ন ধরন:

প্রকৃত আংশিক ভগ্নাংশ, বিভক্ত করা যায় বিভিন্ন রকমের আকারের হর উপর ভিত্তি করে। প্রতিটি আকারের জন্য নির্দিষ্ট নিয়ম অনুসরণ করে ভগ্নাংশগুলোকে আংশিক ভগ্নাংশে ভাঙা যায়।

১. বিভিন্ন লিনিয়ার ফ্যাক্টর (Distinct Linear Factors):

যদি হর একাধিক লিনিয়ার ফ্যাক্টরে বিভক্ত হয়, তবে প্রতিটি ফ্যাক্টরের জন্য একটি আলাদা আংশিক ভগ্নাংশ ব্যবহার করা হয়।

উদাহরণ:

$$\frac{3x+2}{(x-1)(x+2)}$$

ধাপ ১: আংশিক ভগ্নাংশে ভাঙা

$$\frac{3x+2}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

ধাপ ২: LCM নেওয়া এবং সমীকরণ তৈরি

$$3x + 2 = A(x + 2) + B(x - 1)$$

ধাপ ৩: A এবং B এর মান নির্ণয়

$x = 1$ বসিয়ে, $A = 1$ এবং $x = -2$ বসিয়ে, $B = 1$, তাহলে:

$$\frac{3x + 2}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 2}$$

২. পুনরাবৃত্ত লিনিয়ার ফ্যাক্টর (Repeated Linear Factors):

যদি হর একটি লিনিয়ার ফ্যাক্টরের পাওয়ার থাকে অর্থাৎ $(x-a)^n$ তখন প্রতিটি পাওয়ার জন্য একটি আলাদা আংশিক ভগ্নাংশ ব্যবহার করা হয়।

উদাহরণ:

$$\frac{2x+1}{(x-2)^2}$$

ধাপ ১: আংশিক ভগ্নাংশে ভাঙা

$$\frac{2x+1}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

ধাপ ২: LCM নিয়ে সমীকরণ তৈরি

$$2x+1 = A(x-2) + B$$

ধাপ ৩: A এবং B এর মান নির্ণয়

$x = 2$ বসিয়ে $B = 5$ এবং $A = 2$, তাহলে:

$$\frac{2x+1}{(x-2)^2} = \frac{2}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}$$

৩. অবিভাজ্য কোয়াড্রাটিক ভগ্নাংশ (Irreducible Quadratic Factors):

যদি হর কোনো অবিভাজ্য কোয়াড্রাটিক ফ্যাক্টর থাকে, যেমন (x^2+bx+c), তখন তার আংশিক ভগ্নাংশের লবের হবে লিনিয়ার ফর্ম Ax+B।

উদাহর

$$\frac{5x+3}{(x^2+1)(x-3)}$$

ধাপ ১: আংশিক ভগ্নাংশে ভাঙা

$$\frac{5x+3}{(x^2+1)(x-3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-3}$$

ধাপ ২: LCM নিয়ে সমীকরণ তৈরি

$$5x+3 = (Ax+B)(x-3) + C(x^2+1)$$

ধাপ ৩: A, B এবং C এর মান নির্ণয়

এই সমীকরণ থেকে A, B, এবং C নির্ণয় করতে হবে। $A=2$, $B=3$, এবং $C=1$, তাহলে:

$$\frac{5x+3}{(x^2+1)(x-3)} = \frac{2x+3}{x^2+1} + \frac{1}{x-3}$$

৪. পুনরাবৃত্ত অবিভাজ্য কোয়াড্রাটিক ভগ্নাংশ (Repeated Irreducible Quadratic Factors):

যদি অবিভাজ্য কোয়াড্রাটিক ফ্যাক্টরের পাওয়ার থাকে, তখন প্রতিটি পাওয়ারের জন্য আংশিক ভগ্নাংশে লবের হিসেবে লিনিয়ার টার্ম ব্যবহার করা হয়।

উদাহরণ:

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

ধাপ ১: আংশিক ভগ্নাংশে ভাঙা

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

ধাপ ২: LCM নিয়ে সমীকরণ তৈরি

$$3x^2+2x+1 = (Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)$$

ধাপ ৩: A, B, C এবং D এর মান নির্ণয়

এই সমীকরণ থেকে $A, B, C,$ এবং D নির্ণয় করতে হবে।

➔ অপ্রকিত আংশিক ভগ্নাংশ (Improper Partial Fractions):

ইমপ্রপার ভগ্নাংশ হল সেই ভগ্নাংশ যেখানে লবের ডিগ্রি হরের ডিগ্রির থেকে বেশি বা সমান হয়। প্রথমে এটিকে ভাগ করে প্রপার ভগ্নাংশে রূপান্তর করতে হবে।

উদাহরণ: $\dfrac{x^2+3x+5}{x^2-1}$

ধাপ ১: লং ডিভিশন

প্রথমে লং ডিভিশন প্রক্রিয়ায় ভগ্নাংশটিকে ভাগ করতে হবে। এখানে,

$$\frac{x^2+3x+5}{x^2-1} = 1 + \frac{3x+6}{x^2-1}$$

ধাপ ২: আংশিক ভগ্নাংশে ভাঙা

এখন, প্রপার ভগ্নাংশ $\frac{3x+6}{x^2-1}$ কে ভাঙতে হবে। ডিনোমিনেটরকে ফ্যাক্টরাইজ করলে:

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

তাহলে:

$$\frac{3x+6}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

ধাপ ৩: A এবং B নির্ণয়

$$3x + 6 = A(x+1) + B(x-1)$$

$x = 1$ বসিয়ে $A = 3$, এবং $x = -1$ বসিয়ে $B = 3$। তাই,

$$\frac{3x+6}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{x-1} + \frac{3}{x+1}$$

চূড়ান্ত সমীকরণ:

$$\frac{x^2+3x+5}{x^2-1} = 1 + \frac{3}{x-1} + \frac{3}{x+1}$$

ব্যবহার:

আংশিক ভগ্নাংশ বিশেষভাবে ব্যবহৃত হয় **ইন্টিগ্রেশন** এবং **ল্যাপ্লাস ট্রান্সফর্ম** এর মতো ক্ষেত্রে, যেখানে কমপ্লেক্স ভগ্নাংশকে ছোট ছোট ভগ্নাংশে ভাঙা যায় এবং সমীকরণের সমাধান সহজ হয়।

Thank You
For Your Attention

Welcome To My Presentation

Course Name	**: Mathematics**
Chapter	**: Exponential**
Series	
Course Code	: 25921
Semester	: 2^{nd}
Date	: 05/10/2024

Presented By

MD. IMAM HOSSAIN
Jr. Instructor (Mathematics)
Barisal Polytechnic Institute, Barisal.
01533-729320

"Mathematics is the queen of the sciences."

---Carl Friedrich Gauss

e এর সংজ্ঞা:

e ধারাঃ

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{r!} + \ldots\ldots\ldots\infty$$

, এই অসীম পদ পর্যান্ত ধারাটিকে সূচক ধারা বলে।

প্রমান করতে হবে যে, e একটি সসীম সংখ্যা এবং এর মান ২ অপেক্ষা বৃহত্তর এবং ৩ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

প্রমানঃ আমরা জানি,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{r!} + \ldots\ldots\ldots \infty$$

(i)

$$= 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots\ldots$$

সুতরাং, e > 2

আবার, 2! = 1.2 = 2

$$\therefore \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

আবার, 3! = 6 > 2^2

$$\therefore \frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}$$

$4! = 24 > 2^3$

$$\therefore \frac{1}{4!} < \frac{1}{2^3}$$

....

....

$$\therefore e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\infty$$

$$e < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\infty\right)$$

$$e < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3$$

$\therefore e < 3$

সুতরাং, e একটি সসীম সংখ্যা এবং এর মান ২ অপেক্ষা বৃহত্তর এবং ৩ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

সাধারণত e = 2.7182818

দেখাও যে, $\frac{1}{2!}+\frac{1+2}{3!}+\frac{1+2+3}{4!}+\frac{1+2+3+4}{5!}+\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{1}{2}e$

ধরি, S = $\frac{1}{2!}+\frac{1+2}{3!}+\frac{1+2+3}{4!}+\frac{1+2+3+4}{5!}+\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{1}{2}e$

ধারাটির n তম পদ,

$$t_n=\frac{1+2+3+4+\ldots.+n}{(n+1)\,!}=\frac{n(n+1)}{2(n+1)\,!}=\frac{n(n+1)}{2(n+1)\,n!}$$

$$t_n=\frac{n}{2n!}=\frac{n}{2n(n-1)\,!}=\frac{1}{2(n-1)\,!}=\frac{1}{2}\frac{1}{(n-1)\,!}$$

n = 1,2,3,4…….. বসাই,

$$t_1=\frac{1}{2}.\frac{1}{0!}=\frac{1}{2}.1$$

$$t_2=\frac{1}{2}.\frac{1}{(2-1)\,!}=\frac{1}{2}.\frac{1}{1!}$$

$$t_3=\frac{1}{2}.\frac{1}{(3-1)\,!}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2!}$$

$$t_4=\frac{1}{2}.\frac{1}{(4-1)\,!}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3!}$$

……………………

……………………

যোগফল, $S = t_1+t_2+t_3+t_4+.........\infty$

$$S=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\ldots\ldots\infty\right)$$

$$S=\frac{1}{2}e \quad ; \qquad \left[e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\ldots\ldots\infty\right]$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2!}+\frac{1+2}{3!}+\frac{1+2+3}{4!}+\frac{1+2+3+4}{5!}+\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{1}{2}e$$

(showed)

প্রমাণ কর যে, $\frac{2}{1!}+\frac{2+4}{2!}+\frac{2+4+6}{3!}+\ldots\ldots\ldots=3e$

ধরি, ধারাটির যোগফল = S

এখানে ধারাটির n তম পদ,

$$t_n=\frac{2+4+6+\ldots\ldots+2n}{n!}=\frac{2(1+2+3+\ldots\ldots+n)}{n!}$$

$$t_n=\frac{2n(n+1)}{2n!}=\frac{n(n+1)}{n(n-1)!}=\frac{(n-1)+2}{(n-1)!}=\frac{n-1}{(n-1)!}+\frac{2}{(n-1)!}$$

$$t_n=\frac{(n-1)}{(n-1)(n-2)!}+\frac{2}{(n-1)!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{2}{(n-1)}$$

এখন পর্যায়ক্রমে n = 1,2,3,4…… বসাই, $t_1=0+2.1$

$$t_2=1+2.\frac{1}{1!}$$

$$t_3=\frac{1}{1!}+2.\frac{1}{2!}$$

$$t_4=\frac{1}{2!}+2.\frac{1}{31}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

উপরোক্ত পদগুলো যোগ করে,

$$S = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$$

$$= \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots\ldots \infty\right) + 2\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots\ldots \infty\right)$$

$$= e + 2e$$

$$= 3e$$

$$\therefore \quad \frac{2}{1!} + \frac{2+4}{2!} + \frac{2+4+6}{3!} + \ldots\ldots\ldots = 3e$$

(proved)

অসীম পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর, $1+\frac{2}{1!}+\frac{3}{2!}+\frac{4}{3!}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\infty$

এখানে ধারাটি,

$$1+\frac{2}{1!}+\frac{3}{2!}+\frac{4}{3!}+\ldots\ldots\ldots\infty=\frac{1}{0!}+\frac{2}{1!}+\frac{3}{2!}+\frac{4}{3!}+\ldots\ldots\ldots\ldots\infty$$

সুতরাং n তম পদ,

$$t_n=\frac{n}{(n-1)!}=\frac{(n-1)+1}{(n-1)!}=\frac{(n-1)}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!}$$

$$=\frac{(n-1)}{(n-1)(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}$$

এখন n = 1,2,3,4,...... বসাই,

$$t_1=\frac{1}{(-1)!}+\frac{1}{0!}=0+\frac{1}{0!};\qquad [(-1)!=\infty]$$

$$t_2=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}$$

$$t_3=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}$$

$$t_4=\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}$$

....

....

উপরোক্ত পদগুলো যোগ করে,

$$S=\left(0+\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots\ldots\infty\right)+\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots\ldots\ldots\infty\right)$$
$$=e+e=2e$$

উত্তরঃ 2e

ব্যবহার:

এক্সপোনেনশিয়াল সিরিজের ব্যবহার বিভিন্ন বিজ্ঞান ও প্রকৌশল শাখায় অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। এটি প্রাকৃতিক ঘটনা, পদার্থবিদ্যা, আর্থিক মডেলিং, কম্পিউটার সাইন্স এবং আরও অনেক ক্ষেত্রে মৌলিকভাবে প্রয়োগ করা হয়।

Thank You
For Your Attention